Tema 1-2. ESPACIOS TOPOLÓGICOS

- Grado de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -

Curso 2011/12

Profesor: Rafael López Camino

1. En $\mathbb{N}$ estudiar si $d(n,m) = |n^2 - m^2|$ es un espacio métrico.

2. Sea X un conjunto $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una aplicación. Probar que d es distancia si y sólo si se tiene las dos siguientes propiedades: para cualesquiera $x, y, z \in X$,

   (a) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

   (b) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$.

3. Si (X,d) es un espacio métrico, probad que
$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}, \qquad d_2(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$$
son distancias equivalentes a d. Tomando $X = \mathbb{R}$ y d la distancia usual, hallar las bolas.

4. Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una aplicación estrictamente creciente tal que $f(0) = 0$ y si $x, y \geq 0$, entonces $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que $d' = f \circ d$ es una distancia. Hallar aplicaciones f con la propiedad anterior.

5. Probar que la siguiente aplicación es una distancia en $\mathbb{R}^2$:
$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{si } x_1 = y_1 \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & \text{si } x_1 \neq y_1 \end{cases}$$
Hallar gráficamente las bolas de radio 1 centradas en los puntos $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(2,3)$.

6. Se considera $A = \{(x,x^2); x \in \mathbb{R}\}$. Con las tres distancias usuales definidas en $\mathbb{R}^2$, hallar una expresión explícita de la distancia inducida en A.

7. En $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ probar que la siguiente aplicación es una distancia: $d(p,p) = 0$, $d(p,-p) = \pi$ y en el resto de los casos, la longitud del arco más corto en $\mathbb{S}^1$ que une p con q.

8. Estudiar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos o cerrados:

   (a) $\{(x,y); xy = 0\}$.

(b) $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$.

(c) $\{(x, y); 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \cup \{(0, 0)\}$.

(d) $\{(x, y); |x| = 1\}$.

9. Probar que en un espacio métrico los conjuntos formados por un único punto son cerrados. Como conclusión, los conjuntos finitos son cerrados.