Tema 1-1. ESPACIOS TOPOLÓGICOS

- Grado de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -

Curso 2011/12

Profesor: Rafael López Camino

1. Hallad todas las topologías que se pueden definir en un conjunto con tres elementos.

2. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $A = \{a, b\}$. Hallad todas las topologías que se pueden definir en X de forma que A sea abierto y cerrado a la vez.

3. Si $X = \{a, b, c, d\}$ es un conjunto, probad que $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ es una topología. Hallar, si es posible, una base β tal que $\beta \subsetneq \tau$.

4. En $\mathbb{N}$ se considera la familia de los subconjuntos $O \subset \mathbb{N}$ con la siguiente propiedad: "si $n \in O$, entonces todos los divisores de n pertenecen a O". Probar que constituyen una topología en $\mathbb{N}$.

5. Sea X un conjunto Y A y B dos subconjuntos suyos no triviales. ¿qué propiedades debe satisface A y B para que $\tau = \{\emptyset, X, A, B\}$ sea una topología?

6. En $X = [-1, 1]$, probar que $\tau = \{O \subset X; 0 \notin O\} \cup \{O \subset X; (-1, 1) \subset O\}$ es una topología. Hallar una base de abiertos y una base de entorno para cada punto, con el menor número de elementos.

7. Probad que $\tau = \{(a, \infty); a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ es una topología en $\mathbb{R}$, pero no la familia de subconjuntos $\{[a, \infty); a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

8. Sea X un conjunto y $a \in X$. Para cada $x \in X$ se define $B_x = \{a, x\}$. Probad que $\beta = \{B_x; x \in X\}$ es una base de cierta topología. De la misma forma, sea $A \subset X$ y para cada $x \in X$, definimos $B'_x = A \cup \{x\}$. Probad que $\beta' = \{B'_x; x \in X\}$ es una base de topología de X.

9. En $\mathbb{R}^2$ se define para cada $m \in \mathbb{R}$ el conjunto $B_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > x + m\}$. Estudiad si el conjunto $\beta = \{B_m; m \in \mathbb{R}\}$ es base de alguna topología en $\mathbb{R}^2$.

10. Se considera el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por $X = \Big(\mathbb{R} \times \{0\}\Big) \cup \Big([0, \infty) \times \{1\}\Big)$. Se define una topología en X a partir de una base de entornos para cada punto. Si el punto no es $(0, 1)$, entonces se toma una base de entornos para la topología usual y si el punto es $(0, 1)$, se considera la familia

$$\Big\{\Big((a, 0) \times \{0\}\Big) \cup \Big([0, b) \times \{1\}\Big); a, b \in \mathbb{R}, a < b\Big\}.$$

Probad que dos entornos cualesquiera de los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$ se intersecan.

11. Para cada (x,y) en $X = \mathbb{R} \times [0,\infty)$ se asocia una familia de subconjuntos del siguiente modo. Si $y > 0$, se toma bolas abiertas con la topología usual centradas en el punto y contenidas en X; si $y = 0$, se toma bolas abiertas con la topología usual y contenidas en X tangentes al eje de abcisas en $(x,0)$ junto el punto $(x,0)$. Probad que estas familias de subconjuntos son base de entornos para cierta topología.