TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 2
– Grado en Matemáticas –
Curso 2011/12

Nombre:

Razonar todas las respuestas

1. Sea $(\mathbb{R}, \tau_{in})$ para $p = 0$, $(\mathbb{R}, \tau_{ex})$ para $q = 1$ y la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_{in}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ex})$, $f(x) = x^2$. Estudiar si f es o no continua y probad que f es continua en $x = 1$.

2. Construir explícitamente un homeomorfismo entre el conjunto $X = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$ y el dado por $Y = \{(x, x^2); -1 < x < 1\}$.

3. Sea un espacio topológico (X, τ) y $A = \{(x, x) \in X \times X; x \in X\}$. Establecer un homeomorfismo entre (X, τ) y $(A, (\tau \times \tau)_{|A})$. Estudiar cuándo A es abierto en $(X \times X, \tau \times \tau)$.

4. Sea $X = [-1, 2]$ y $A = [-1, 0] \cup [1, 2]$. En X se define la relación de equivalencia:
$$x \; R \; y \text{ si } \begin{cases} \text{son iguales, ó} \\ x, y \in A \end{cases}$$
Probar que X/R es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Soluciones

1. La aplicación no es continua. Por ejemplo, el conjunto $O = \{4\}$ es abierto en $(\mathbb{R}, \tau_{ex})$, pero $f^{-1}(O) = \{-2, 2\}$ no pertenece a τ_{in}.

   Como $f(1) = 1^2 = 1$, tomamos bases de entornos de 1 en $(\mathbb{R}, \tau_{in})$, a saber, $\beta_1 = \{V = \{0, 1\}\}$ y base de entornos de 1 en $(\mathbb{R}, \tau_{ex})$, esto es, $\beta'_1 = \{V' = \mathbb{R}\}$. Es evidente que $f(V) = \{0, 1\}$ está incluido en V' y por tanto, f es continua en $x = 1$.

2. El giro $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\phi(x, y) = (-y, x)$ es un homeomorfismo y por tanto, $f_{|X} : X \to f(X) = \mathbb{R} \times \{0\}$ es un homeomorfismo.

   El conjunto $\mathbb{R} \times \{0\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ mediante $\psi(x, 0) = x$.

   La recta real $\mathbb{R}$ es homeomorfa a $(-1, 1)$ mediante $\eta(x) = x/(1 + |x|)$.

   El conjunto Y es el grafo de la función x^2 y por tanto, es homeomorfo a su dominio, es decir, a $(-1, 1)$. El homeomorfismo es $\alpha(x, y) = x$.

   El homeomorfismo pedido es por tanto, $f = \alpha^{-1} \circ \eta \circ \psi \circ \phi$, es decir,

   $$f(0, y) = (-\frac{y}{1 + |y|}, \frac{y^2}{(1 + |y|)^2}.$$

3. Se define la aplicación $f : A \to X$ mediante $f(x, x) = x$. Esta aplicación es biyectiva y su inversa es $g(x) = (x, x)$. La aplicación f es continua, ya que $f = p_{|A}$, donde $p : (X \times X, \tau \times \tau) \to (X, \tau)$ es la primera proyección, $p(x, y) = x$. La aplicación g es continua. Para ello, se considera $h : X \to X \times X$ mediante $h(x) = (x, x)$. Esta aplicación es continua ya que al componer con las proyecciones queda $p \circ h = 1_X$. Como $Im(h) = A$, entonces $h : (X, \tau) \to (A, (\tau \times \tau)_{|A})$ es continua. Pero esta aplicación es justamente g.

   Si el conjunto A es abierto, entonces todo punto suyo es interior a A. Sea $x \in X$. Entonces existen $O, O' \in \tau$ tales que $(x, x) \in O \times O' \subset A$. Tomamos $G = O \cap O'$. Entonces $(x, x) \in G \times G \subset A$. Si G tiene más de un elemento, a saber, $y \in G$, $x \neq y$, entonces $(x, y) \in G \times G \subset A$: contradicción. Por tanto, $G = \{x\}$. Esto prueba que $\{x\}$ es un conjunto abierto. Ya que esto se hace para todo $x \in X$, se concluye que si A es abierto, entonces la topología τ es la discreta. El recíproco es inmediato, es decir, si τ es la topología discreta, entonces $\tau \times \tau$ es la topología discreta en $X \times X$, luego todo subconjunto suyo es abierto, en particular, el conjunto A.

Se concluye entonces con que A es abierto en $(X \times X; \tau \times \tau)$ si y sólo si τ es la topología discreta.

4. Las clases de equivalencia son $[0] = A$ y $[x] = \{x\}$ si $x \notin A$.

   Se define $f : X \to \mathbb{S}^1$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} (1,0) & \text{si } x \in [-1,0] \\ (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) & \text{si } x \in [0,1] \\ (1,0) & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

   Ya que $f(x) = (1,0) = f(0) = f(1)$ para $x \in A$, entonces $xR_f y$ si y sólo si xRy.

   La aplicación f es continua pues la restricción a los cerrados de X dados por A y $[0,1]$ es continua: en el primer caso, la aplicación es constante; en el segundo es la aplicación $x \longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$, que ya es continua vista de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{S}^1$.

   La aplicación es sobreyectiva, pues $f(X) = f([0,1]) = \mathbb{S}^1$.

   El conjunto X es un intervalo cerrado, luego es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}$; la imagen, $\mathbb{S}^1$, está incluido en $\mathbb{R}^2$. Por tanto, f es cerrada.

   Como conclusión, f es una identificación, probamos que $X/R \cong \mathbb{S}^1$.