TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 1
– Grado en Matemáticas –
Curso 2011/12

<u>**Nombre**</u>**:**

Razonar todas las respuestas

1. Sea X un conjunto y $A \subset X$. Se define una topología mediante
$$\tau = \{O \subset X; A \subset O\} \cup \{\emptyset\}.$$
   (a) Probar que $\beta = \{\{x\} \cup A; x \in X\}$ es una base de τ.
   (b) Si $B \subset X$, hallar el interior y la adherencia de B.
   (c) ¿Qué topología conocida es $\tau_{|A}$?
2. Para $X = [-1, 1]$, probar que $\tau = \{O \subset X; 0 \notin O\} \cup \{O \subset X; (-1, 1) \subset O\}$ es una topología en X. Hallar una base de entornos para $x \in X$ con el menor número de entornos. Hallad el interior y adherencia del conjunto $A = [0, 1]$.
3. Sea $A = [0, 1) \cup (2, 3) \cup \{5\}$ con la topología usual.
   (a) Estudiar si $\{5\}$ y $(2, 3)$ son abiertos o cerrados en A.
   (b) Hallar el interior y la adherencia en A de $(0, 1)$.
   (c) Probar que $\{\{5\}\}$ es una base de entornos de $x = 5$ en A.

Soluciones

1. Sea X un conjunto y $A \subset X$. Se define una topología mediante

$$\tau = \{O \subset X; A \subset O\} \cup \{\emptyset\}.$$

   (a) Probar que $\beta = \{\{x\} \cup A; x \in X\}$ es una base de τ.

   Los conjuntos son abiertos ya que contienen a O. Por otro lado, si $O \in \tau$ y $x \in O$, entonces $\{x\} \cup A \subset O$ ya que $A \subset O$. Por tanto, $x \in \{x\} \cup A \subset O$.

   (b) Si $B \subset X$, hallar el interior y la adherencia de B.

   El interior de B es el mayor conjunto abierto dentro de B. En particular, $int(B) \subset A$. Si $B \supset A$, entonces B es abierto y coincide con su interior. En caso contrario, $int(B) = \emptyset$ ya que si no, $A \subset int(B) \subset B$, lo cual no es posible.

   Los conjuntos cerrados F son aquéllos tales que $A \subset X - F$ o $F = X$, es decir, $F \subset X - A$ o $F = X$. Ya que $\overline{B}$ es el menor cerrado que contiene a B, si $B \subset X - A$, entonces $\overline{B} = B$. En caso contrario, es decir, si $B \not\subset X - A$, entonces $\overline{B} = X$.

   (c) ¿Qué topología conocida es $\tau_{|A}$?

$$\tau_{|A} = \{O \cap A; O \in \tau\} \cup \{\emptyset\} = \{A\} \cup \{\emptyset\}.$$

   Por tanto, $\tau_{|A}$ es la topología trivial de A.

2. Para $X = [-1, 1]$, probar que $\tau = \{O \subset X; 0 \notin O\} \cup \{O \subset X; (-1, 1) \subset O\}$ es una topología en X. Hallar una base de entornos para $x \in X$ con el menor número de entornos. Hallad el interior y adherencia del conjunto $A = [0, 1]$.

   A los abiertos de la primera familia los llamaremos del primer tipo y los de la segunda, del segundo tipo. El conjunto vacío está en τ por definición y por otro lado, X pertenece al del segundo tipo.

   Sea $\{O_i\}_{i \in I} \subset \tau$. Si alguno de los abiertos, llamado O_{i_0}, es del segundo tipo, entonces

$$(-1, 1) \subset O_{i_0} \subset \cup_{i \in I} O_i,$$

luego la unión es del segundo tipo. En caso contrario, es decir, si todos son del primer tipo, entonces ningún abierto contiene a $x = 0$ y menos aún, la unión de todos.

Sea $O_1, O_2 \in \tau$. Es evidente que si los dos son del primer tipo, la intersección no contiene a $x = 0$; que si los dos son del segundo tipo, ambos contienen a $(-1, 1)$, y por tanto, también la intersección. Finalmente, si O_1 es del primer tipo y O_2 del segundo, entonces $0 \notin O_1$ y por tanto, $0 \notin O_1 \cap O_2$.

Una base de entornos de x es:

$$\beta_x = \begin{cases} \{(-1,1)\} & \text{si } x = 0 \\ \{\{x\}\} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Es evidente que en ambos casos, los conjuntos son abiertos, luego entornos de todos sus puntos. Por otro lado, si U es un entorno de 0, existe $O \in \tau$ tal que $0 \in O \subset U$. Entonces O contiene al 0, luego tiene que ser del segundo tipo, en particular, $(-1, 1) \subset O$, probando que $0 \in (-1, 1) \subset U$. Si $x \neq 0$ y U es un entorno suyo, entonces $x \in \{x\} \subset U$.

El conjunto $(0, 1]$ es abierto porque no tiene a $x = 0$. Veamos si 0 es interior a A. En tal caso, $(-1, 1) \subset A$, ya que $(-1, 1)$ es el elemento de la base de entornos de $x = 0$. Como esto no es posible, $int(A) = (0, 1]$. Para la adherencia, si $x \notin A$, entonces $x \neq 0$, luego $\{x\} \cap A = \emptyset$ y así no es adherente. Esto dice que $\overline{A} = A$ (también A es cerrado ya que su complementario, que es $[-1, 0)$, es abierto (del primer tipo)).

3. Sea $A = [0, 1) \cup (2, 3) \cup \{5\}$ con la topología usual.

   (a) Estudiar si $\{5\}$ y $(2, 3)$ son abiertos o cerrados en A.

   El conjunto $\{5\}$ es abierto y cerrado en A ya que $\{5\} = (4, 6) \cap A = [4, 6] \cap A$ y $(4, 6)$ y $[4, 6]$ son abiertos y cerrados de $\mathbb{R}$, respectivamente.

   El conjunto $(2, 3)$ es abierto y cerrado en A ya que $(2, 3) = (2, 3) \cap A = [2, 3] \cap A$ y $(2, 3)$ y $[2, 3]$ son abiertos y cerrados de $\mathbb{R}$, respectivamente.

   (b) Hallar el interior y la adherencia en A de $(0, 1)$.

   El conjunto $(0, 1)$ es abierto en A: $(0, 1) = (0, 1) \cap A$, luego coincide con su interior. Por otro lado, $[0, 1)$ es cerrado en A ya que $[0, 1) = [0, 1] \cap A$ y $[0, 1]$ es cerrado de $\mathbb{R}$. En particular, la adherencia de $(0, 1)$ en A está contenida en $[0,1)$. Finalmente, $x=0$ es adherente a A ya que una base de entornos de 0 en A es $\{[0,\epsilon); 0<\epsilon<1\}$ pues $[0,\epsilon)=(-\epsilon,\epsilon)\cap A$ y $\{(-\epsilon,\epsilon); 0<\epsilon<1\}$ es una base de entornos de $x=0$ en $\mathbb{R}$. Por tanto la adherencia del conjunto es $[0,1)$.

(c) Probar que $\{\{5\}\}$ es una base de entornos de $x=5$ en A.

Ya se ha visto que $\{5\}$ es un abierto en A, luego un entorno de $x=5$ en A. Como todo entorno de 5 en A debe contener a $x=5$, en particular, $\{5\}$ está contenido en dicho entorno. Otra forma es: una base de entornos de $x=5$ en la topología usual de $\mathbb{R}$ es $\{(5-\epsilon,5+\epsilon); 0<\epsilon<1\}$. Por tanto, una base de entornos de 5 en A es

$$\{(5-\epsilon,5+\epsilon)\cap A; 0<\epsilon<1\}=\{\{5\}\}.$$