TOPOLOGÍA. Examen del Tema 3
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 A -
Curso 2010/11
Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

Razonar las respuestas

1. Sean en $\mathbb{R}$ las topologías τ_1 y τ_2 del punto excluido para $p = 1$ y $q = 2$, respec. En $(\mathbb{R}^2, \tau_1 \times \tau_2)$, hallar el interior y la adherencia de la diagonal principal.
2. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología τ_S que tiene por base $\beta_S = \{[a, b); a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ y τ_d la de base $\beta_d = \{[a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$. En el producto $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_S \times \tau_d)$ probar que el conjunto $D = \{(x, x); x \in \mathbb{R}\}$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau_S)$ y $A = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\}$ tiene la topología discreta.
3. Estudiar la continuidad de $f : (\mathbb{R}, \tau_S) \to (\mathbb{R}^2, \tau_u \times \tau_S)$, $f(x) = (x, x + 1)$.

1. Sean en $\mathbb{R}$ las topologías τ_1 y τ_2 del punto excluido para $p = 1$ y $q = 2$, respec. En $(\mathbb{R}^2, \tau_1 \times \tau_2)$, hallar el interior y la adherencia de la diagonal principal.

   Solución. Sea $D = \{(x,x); x \in \mathbb{R}\}$ la diagonal principal. Una base de entornos en la topología $\tau_1 \times \tau_2$ de (x,y) es

   $$\beta_{(x,y)} = \{\{x,1\} \times \{y,2\}\} = \{(x,y),(x,2),(1,y),(1,2)\}.$$

   Por tanto, una base de entornos de (x,x) es

   $$\beta_{(x,x)} = \{\{x,1\} \times \{x,2\}\} = \{(x,x),(x,2),(1,x),(1,2)\},$$

   que al menos tiene al punto $(1,2)$ que no está en la diagonal principal. Esto quiere decir que $\{(x,x),(x,2),(1,x),(1,2)\} \not\subset D$ y por tanto, el interior es el vacío.

   Si (x,y) no está en la diagonal principal, entonces $x \neq y$, y por tanto, el conjunto $\{(x,y),(x,2),(1,y),(1,2)\}$ intersecará a D si $x = 2$ o $y = 1$. Por tanto,

   $$\overline{D} = \{(2,y); y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,1); x \in \mathbb{R}\}.$$

2. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología τ_S que tiene por base $\beta_S = \{[a,b); a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ y τ_d la de base $\beta_d = \{[a,\infty); a \in \mathbb{R}\}$. En el producto $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_S \times \tau_d)$ probar que el conjunto $D = \{(x,x); x \in \mathbb{R}\}$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau_S)$ y $A = \{(x,-x); x \in \mathbb{R}\}$ tiene la topología discreta.

   Solución.

   (a) Se define $f : D \to (\mathbb{R}, \tau_S)$ mediante $f(x,x) = x$, cuya inversa es $g : (\mathbb{R}, \tau_S) \to D$, $g(x) = (x,x)$. La aplicación g es continua, ya que al componer con la proyecciones tenemos $p \circ g = 1_R$ en $(\mathbb{R}, \tau_S)$ y $p' \circ g : (\mathbb{R}, \tau_S) \to (\mathbb{R}, \tau_d)$ es continua, pues $(p' \circ g)^{-1}([a,\infty) = [a,\infty) \in \tau_S$.
   Por otro lado, la aplicación f es continua, ya que

   $$f^{-1}([a,b)) = \{(x,x); x \in [a,b)\} = ([a,b) \times [a,\infty)) \cap D \in (\tau_S \times \tau_d)_{|D}.$$

   (b) Para $(x,-x)$ una base de entornos en A es

   $$\{([x,y) \times [-x,\infty)) \cap A; y > x\} = \{(x,-x\}.$$

3. Estudiar la continuidad de $f : (\mathbb{R}, \tau_S) \to (\mathbb{R}^2, \tau_u \times \tau_S)$, $f(x) = (x, x+1)$.

   Solución. Al componer con la primera proyección, tenemos la aplicación identidad $1_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \tau_S) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ que es continua, pues $1_{\mathbb{R}}^{-1}((a,b)) = (a,b) \in \tau_S$. Con la segunda, $(p' \circ f)^{-1}([a,b)) = [a-1, b-1)$, que está en τ_S.