TOPOLOGÍA. Examen del Tema 2

- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 A -

Curso 2010/11

Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

Razonar las respuestas

1. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología τ que tiene por base $\beta = \{[a, b); a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. Estudiar la continuidad de la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ dada por $f(x) = 0$ si $x < 0$ y $f(x) = 1$ si $x \geq 0$.

2. Establecer un homeomorfismo entre los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = (0, 1) \cup [2, 3], \qquad B = (-1, 0) \cup [3, 4].$$

3. Estudiar en qué puntos es continua la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_i) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$, $f(x) = x^2$, donde τ_i es la topología del punto incluido para $p = 0$.

1. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología τ que tiene por base $\beta = \{[a,b); a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. Estudiar la continuidad de la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ dada por $f(x) = 0$ si $x < 0$ y $f(x) = 1$ si $x \geq 0$.

   Solución. Una base de entornos de x es $\beta_x = \{[x, y); x < y\}$. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < 0$. Entonces $f(x) = 0$. Dado $V' = [0, y)$, se toma $U = [x, x/2)$ como entorno de x. Entonces $f(U) = \{0\} \subset V'$.

   Sea ahora $x \geq 0$. Entonces $f(x) = 1$. Sea $V' = [1, y)$. Sea $U = [x, x+1)$ entorno de x que satisface $f(U) = \{1\} \subset V'$. Esto prueba que f es continua en $\mathbb{R}$.

2. Establecer un homeomorfismo entre los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = (0,1) \cup [2,3], \qquad B = (-1,0) \cup [3,4].$$

   Solución. Se sabe que dos intervalos del mismo "tipo" son homeomorfos entre sí. Sean por tanto, f un homeomorfismo entre $(0,1)$ y $(-1,0)$ y g otro entre $[2,3]$ y $[3,4]$. Se define $\phi : A \to B$ como $\phi_{|(0,1)} = f$ y $\phi_{|[2,3]} = g$. Es evidente que ϕ es biyectiva al serlos f y g. Además la restricción de ϕ a $(0,1)$ y $[2,3]$ son continuas: veámoslo por ejemplo, en $(0,1)$. Sea $i : (-1,0) \to B$ la aplicación inclusión, que es continua. Entonces $\phi_{|(0,1)} = i \circ f$.

   Para finalizar, ϕ es continua globalmente ya que $(0,1)$ y $[2,3]$ constituyen una partición por abiertos de A: que sea una partición es trivial, y lo mismo con que $(0,1)$ sea un abierto de A; por último, $[2,3]$ es abierto ya que $[2,3] = (1'5, 3'5) \cap A$.

3. Estudiar en qué puntos es continua la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_i) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$, $f(x) = x^2$, donde τ_i es la topología del punto incluido para $p = 0$.

   Solución. Una base de entornos de x en $(\mathbb{R}, \tau_i)$ es $\beta_x = \{U_x := \{\{x, 0\}\}$.

   (a) f es continua en $x = 0$. Como $f(0) = 0$, dado $(-\epsilon, \epsilon)$ entorno de $f(0)$, se tiene $f(U_0) = \{0\} \subset (-\epsilon, \epsilon)$.

   (b) f no es continua si $x \neq 0$. Supongamos que $x > 0$. Sea $\epsilon = x/2$ y $V' = (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Entonces $f(U_x) = \{0, x^2\} \not\subset V'$. De la misma forma se hace si $x < 0$.