TOPOLOGÍA. Examen del Tema 3

- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -

Curso 2008/09

Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

1. Sea $\beta = \{[a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$ y τ la topología que genera en $\mathbb{R}$. Calcular el interior del conjunto $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R};\} \cup \{(0, x); x \in \mathbb{R}\}$ en $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_u \times \tau)$.
2. Sea $X = \{a, b\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. Hallar la adherencia del conjunto $A = \{(a, a), (b, b)\}$ en $(X \times X, \tau \times \tau)$.
3. Estudiar la continuidad de las aplicaciones $f, g : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_{Sor} \times \tau_u) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ dadas por $f(x, y) = x$ y $g(x, y) = x + y$.

Soluciones.

1. Una base de entornos de un punto (x, y) es
$$\beta_{(x,y)} = \{(x-r, x+r) \times [y, \infty); r >\}.$$
Veamos que $int(A) = \emptyset$. Sea $(x, 0) \in A$, $x \neq 0$. Si fuera interior, existiría $r > 0$ tal que $(x-r, x+r) \times [0, \infty) \subset A$, lo cual es falso pues $(x, 1)$ está en el primer conjunto y no en el segundo.

   Sea ahora $(0, x) \in A$, con $x \neq 0$. Si fuera interior, existiría $r > 0$ tal que $(-r, r) \times [x, \infty) \subset A$, lo cual es falso también ya que $(r/2, x)$ pertenece al primer conjunto y no está en A.

   Para $(0, 0)$, y para todo $r > 0$, $(-r, r) \times [0, \infty) \subset A$, pues $(r/2, r/2)$ no está en A.

2. Una base de la topología producto es
$$\tau \times \tau = \{\emptyset, X \times X, \{a\} \times X, X \times \{a\}.$$
Una base de entornos de (a, b) es $\{X \times X, \{a\} \times X\}$. Cada uno de estos entornos interseca a $X \times X - A$ (el propio punto (a, b)) y también a A (el punto (a, a)).

   Una base de entornos de (b, a) es $\{X \times X, X \times \{a\}\}$. Cada uno de estos entornos interseca a $X \times X - A$ (el propio punto (b, a))) y también a A (el punto (a, a)).

   Por tanto, los dos puntos anteriores son adherentes, que junto con los de A da $\overline{A} = X \times X$.

   Otra forma:
$$\begin{aligned}\overline{A} &= \overline{\{(a,a)\} \cup \{(b,b)\}} = \overline{\{(a,a)\}} \cup \overline{\{(b,b)\}} \\ &= \left(\overline{\{a\}} \times \overline{\{a\}}\right) \cup \overline{\{(b,b)\}} = (X \times X) \cup \overline{\{(b,b)\}} = X \times X.\end{aligned}$$

3. La aplicación f es continua: dada la base $\beta = \{(a, b); a < b\}$,
$$f^{-1}((a, b)) = (a, b) \times \mathbb{R} \subset \tau_{Sor} \times \tau_u,$$
ya que $\tau_u \subset \tau_{Sor}$.

   Por otro lado, $g = f + p_2$, con $p_2 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_{Sor} \times \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ la segunda proyección. Por el álgebra de las funciones continuas que tienen por codominio $(\mathbb{R}, \tau_u)$, g es continua.