TOPOLOGÍA. Examen del Tema 2
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2008/09
Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

1. Sea $(\mathbb{R}, \tau_{in})$ para $p = 0$, $(\mathbb{R}, \tau_{ex})$ para $q = 1$ y la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_{in}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ex})$, $f(x) = x^2$. Probad que f es continua en $x = 1$ pero no en $x = 2$.

2. Construir explícitamente un homeomorfismo entre $\mathbb{S}^1$ y la elipse
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1\}.$$

3. Construir explícitamente un homeomorfismo entre el conjunto $X = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$ y el dado por $Y = \{(x, x^2); -1 < x < 1\}$.

Soluciones.

1. En $(\mathbb{R}, \tau_{in})$, una base de entornos de $x = 1$ es $\beta_1 = \{U = \{0, 1\}\}$, de $x = 2$, $\beta_2 = \{V = \{0, 2\}\}$. En $(\mathbb{R}, \tau_{ex})$, $\beta'_1 = \{W = \mathbb{R}\}$ y $\beta'_4 = \{O = \{4\}\}$.

   Es continua en $x = 1$ pues $f(U) = U \subset W$. No es continua en $x = 2$ pues $f(V) = \{0, 4\} \not\subset O$.

2. Se define la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x, 2y)$. Esta aplicación es una afinidad y por tanto, un homeomorfismo. Por otro lado, es evidente que $f(\mathbb{S}^1) = E$. Luego $f_{|\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to f(\mathbb{S}^1) = E$ es un homeomorfismo.

3. X es homeomorfo a $\mathbb{R}$ mediante $f : X \to \mathbb{R}$, $f((0, y)) = y$ ($X \cong \{(y, 0) \in \mathbb{R}^2; y \in \mathbb{R}\}$ mediante un giro de 90 grados, y el último conjunto era homeomorfo a $\mathbb{R}$).

   La recta real $\mathbb{R}$ es homeomorfa al intervalo $(-1, 1)$, por ejemplo, con $g(x) = \frac{x}{1-|x|}$.

   El conjunto Y es homeomorfo al intervalo $(-1, 1)$ por ser el grafo de la función x^2; concretamente, $h : (-1, 1) \to Y$, $h(x) = (x, x^2)$.

   El homeomorfismo buscado es $h \circ g \circ f$, es decir,

$$(0, y) \longmapsto (\frac{y}{1 - |y|}, (\frac{y}{1 - |y|})^2).$$