TOPOLOGÍA. Examen del Tema 1
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2008/09
Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

1. Sea $X = [-1, 1]$ y se define $\beta = \{\{x\}; x \neq 0\} \cup \{(-1, 1)\}$. Probad que β es base de una topología en X. Hallad el interior y adherencia del conjunto $A = [0, 1]$.
2. Se considera $\mathbb{R}$ con la topología usual τ. Probad $\tau_{|\mathbb{Z}}$ es la topología discreta en $\mathbb{Z}$. Si $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, probad $\tau_{|A}$ no es la topología discreta en A.
3. Sea X un conjunto y $A, B \subset X$ dos subconjuntos no triviales. Se define $\tau = \{\emptyset, X, A, B\}$. ¿Qué propiedades deben satisfacer A y B para que τ sea una topología en X? Sea $p \in X$. Hallad el interior, adherencia, frontera y exterior de $C = \{p\}$.

TOPOLOGÍA. Examen del Tema 1
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2008/09
Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

1. Sea $X = [-1,1]$ y se define $\beta = \{\{x\}; x \neq 0\} \cup \{(-1,1)\}$. Probad que β es base de una topología en X. Hallad el interior y adherencia del conjunto $A = [0,1]$.

   Solución: Es evidente que la unión de todos los elementos de β es $[-1,1]$. Incluso menos, pues $[-1,1] = \{-1\} \cup \{1\} \cup (-1,1)$. . Por otro lado, si $B_1, B_2 \in \beta$ con $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, es porque uno es $B_1 = \{x\}$, $x \neq 0$ y el otro es $B_2 = (-1,1)$. Ya que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, entonces $B_1 \cap B_2 = B_1$, luego la segunda propiedad de bases es evidente.

   Para calcular el interior de A estudiamos el mayor abierto dentro de A. Es evidente que $\cup_{x\in(0,1]}\{x\} = (0,1]$ es un abierto incluido en A. Veamos que $0 \notin int(A)$. En tal caso, existiría $B \in \beta$ tal que $0 \in B \subset A$. Como $0 \in B$, entonces $B = (-1,1)$ pero $(-1,1) \not\subset [0,1]$. Esto quiere decir que 0 no es interior. Como consecuencia $int(A) = (0,1]$.

   Por otro lado, $[-1,1] - A = [-1,0) = \cup_{x\in[-1,0)}\{x\}$, entonces $[-1,1] - A$ es abierto, es decir, A es cerrado. Por tanto $\overline{A} = A$.

2. Se considera $\mathbb{R}$ con la topología usual τ. Probad $\tau_{|\mathbb{Z}}$ es la topología discreta en $\mathbb{Z}$. Si $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, probad $\tau_{|A}$ no es la topología discreta en A.

   Solución: Una base de entornos para cada $x \in \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es $\beta_x = \{(x-r, x+r); 0 < r < 1\}$. Por tanto, una base de entornos de $n \in \mathbb{Z}$ es

   $$\beta_n^{\mathbb{Z}} = \{(n-r, n+r) \cap \mathbb{Z}; 0 < r < 1\} = \{\{n\}\}.$$

   Se sabe entonces que la topología es la discreta.

   En el conjunto A, un base de entornos de 0 es

   $$\beta_0^A = \{(-r,r) \cap A; r > 0\}.$$

   Si la topología fuera la discreta, el conjunto $\{0\}$ sería abierto en A, y por tanto, 0 sería interior en $\{0\}$. En tal caso, existiría $r > 0$ tal que

   $$(-r,r) \cap A \subset \{0\}.$$

   Pero el conjunto de la izquiera tiene más de un punto, puesto que $\{\frac{1}{n}\} \to 0$.

3. Sea X un conjunto y $A, B \subset X$ dos subconjuntos no triviales. Se define $\tau = \{\emptyset, X, A, B\}$. ¿Qué propiedades deben satisfacer A y B para que τ sea una topología en X? Sea $p \in X$. Hallad el interior, adherencia, frontera y exterior de $C = \{p\}$.

Solución: Se tiene que $A \cup B \in \tau$ y que $A \cap B \in \tau$, es decir,

$$A \cup B \in \{\emptyset, X, A, B\}, \qquad A \cap B \in \{\emptyset, X, A, B\}.$$

Las posibilidades son entonces:

(a) $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$, es decir, A y B son complementarios uno del otro.

(b) $A \cup B = A$, es decir, $B \subset A$, entonces $A \cap B = B \in \tau$.

(c) $A \cup B = B$, es decir, $A \subset B$, entonces $A \cap B = A \in \tau$.

Para hallar el interior y la adherencia de C usamos las caracterizaciones que nos dicen que el interior es el mayor conjunto abierto en C y la adherencia es el menor cerrado que contiene a C. Para cada una de las anteriores topologías, tenemos

(a) En este caso, $\mathcal{F} = \tau$. Supongamos que $p \in A$. Entonces $int(C) = \emptyset$ si $\{p\} \neq A$ o $int(C) = \{p\}$ si $A = \{p\}$. En cualquiera de los dos casos, $\overline{C} = A$. Si $p \in B$, el razonamiento es análogo, cambiando A por B.

(b) Supongamos que $B \subset A$.

   i. Si $p \in B$, entonces $int(C) = \emptyset$ si $\{p\} \neq B$ o $int(C) = \{p\}$ si $B = \{p\}$. En cualquier caso, $ext(C) = \emptyset$.

   ii. Si $p \in A - B$, entonces $int(C) = \emptyset$ y $ext(C) = B$.

   iii. Si $p \in X - A$, entonces $int(C) = \emptyset$ y $ext(C) = A$.

(c) Este caso es análogo al anterior, cambiando A por B.