TOPOLOGÍA. Examen del Tema 6

Nombre:

1. Dar un ejemplo de un espacio topológico y un subconjunto suyo que sea compacto pero no cerrado. Lo mismo, pero que sea cerrado y no sea compacto.

2. Se considera $(\mathbb{R}, \tau(\beta))$, $\beta = \{(a, \infty), a \in \mathbb{R}\}$. Encontrar dos subconjuntos compactos cuya intersección no lo es.

3. Estudiar la compacidad local del siguiente espacio topológico: $(\mathbb{R}^2, \tau(\beta))$, donde $\beta = \{B_a; a \in \mathbb{R}\}$ y $B_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq a\}$.

4. Hallar f para que $([0, 2], f)$ sea una compactificación de $[0, 1)$. Estudiar si es la compactificación de Alexandrov.

1. Dar un ejemplo de un espacio topológico y un subconjunto suyo que sea compacto pero no cerrado. Lo mismo, pero que sea cerrado y no sea compacto.

   Solución.

   (a) (El espacio no puede ser T_2) Sea $(X; \tau_{in})$ siendo $p \in X$ el "punto incluido". Entonces $A = \{p\}$ es compacto pues es finito, pero no es cerrado ya que su complementario no es abierto (ya que no contiene a p).

   (b) Se toma $X = \mathbb{R}$ y $A = [0, \infty)$: A es cerrado, pero no es compacto al no ser acotado.

2. Se considera $(\mathbb{R}, \tau(\beta))$, $\beta = \{(a, \infty), a \in \mathbb{R}\}$. Encontrar dos subconjuntos compactos cuya intersección no lo es.

   Solución. Sea $A = \{0\} \cup (2, \infty)$ y $B = \{1\} \cup (2, \infty)$. Entonces tanto A como B son compactos. Por ejemplo, si $A \subset \cup_{i \in I} B_i$, con $B_i \in \beta$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $0 \in B_{i_0}$. Pero como $B_{i_0} = (a, \infty)$, para un cierto a (en particular, $a < 0$) entonces $B_{i_0} \supset A$.

   Sin embargo $A \cap B = (2, \infty)$ no es compacto, ya que $(2, \infty) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \big(2 + \frac{1}{n}, \infty)$ y no se puede extraer un subrecubrimiento finito, ya que en tal caso, su unión es de la forma $(2 + \frac{1}{m}, \infty)$ para un cierto $m \in \mathbb{N}$.

3. Estudiar la compacidad local del siguiente espacio topológico: $(\mathbb{R}^2, \tau(\beta))$, donde $\beta = \{B_a; a \in \mathbb{R}\}$ y $B_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq a\}$.

   Solución. Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Una base de entornos de dicho punto es $\beta_{(x_0, y_0)} = \{B_{x_0}\}$. Veamos que cualquier conjunto B_a es compacto. Sea $B_a \subset \cup_{i \in I} B_{c_i}$. Sea $(a, 0) \in B_a$. Entonces existe $i_0 \in I$ tal que $(a, 0) \in B_{c_{i_0}} = [c_{i_0}, \infty) \times \mathbb{R}$. En particular, $c_{i_0} \leq a$. Por tanto, $B_{c_{i_0}} \supset B_a$.

4. Hallar f para que $([0, 2], f)$ sea una compactificación de $[0, 1)$. Estudiar si es la compactificación de Alexandrov.

   Solución. Sea $f : [0, 1) \to [0, 2]$ el homeomorfismo $f(x) = 2x$. Entonces $[0, 1) \cong f([0, 1))$, $2 \in \overline{[0, 2)} = [0, 2]$ y $[0, 2]$ es compacto. Como $\operatorname{card}\Big([0, 2] - f([0, 1))\Big) = 1$, es una compactificación por un punto.

   Por otro lado, $[0, 1)$ es T_2 (por ser un espacio métrico) y es localmente compacto, al ser intersección de un abierto y de un cerrado ($[0, 1) = [0, 1] \cap (-1, 1)$). Por otro lado $[0, 2]$ es T_2. Como conclusión, es la compactifación de Alexandrov.