TOPOLOGÍA. Examen del Tema 5

Nombre:

1. Estudiad los axiomas ANI y ANII de la topología de los complementos finitos.
2. Sea un espacio topológico (X, τ) y p un elemento que no pertenece a X. Sea $X' = X \cup \{p\}$. Se define en X' la topología dada por $\tau' = \tau \cup \{X'\}$. Estudiad los axiomas de separación de (X', τ').
3. Estudiad los axiomas de numerabilidad de la topología en $\mathbb{R}$ que tiene por base $\beta = \{(a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$.
4. Probad que un subconjunto cerrado de un espacio normal también es normal.

1. Estudiad los axiomas ANI y ANII de la topología de los complementos finitos.

   Solución. Supongamos que X es numerable. Entonces el conjunto de cerrados $\mathcal{F} = \{F \subset X; F \text{ es finito }\}$ es numerable. Como hay tantos abiertos como cerrados, entontes la topología es numerable. Esto prueba que es ANII y, en consecuencia, también ANI.

   Si X no es numerable, demostramos que no es ANI (y por tanto, tampoco ANII). Sea $x \in X$ y $\beta_x = \{U_n; n \in \mathbb{N}\}$ una base de entornos de x ($U_n = X - F_n$, con F_n un conjunto finito y $x \notin F_n$). Para cada $y \in X$, $y \neq x$, $U = X - \{y\}$ es un entorno de x. Por tanto, existe $n_y \in \mathbb{N}$ tal que $U_{n_y} \subset X - \{y\}$, es decir, $y \in F_{n_y}$. Luego

   $$X - \{y\} \subset \bigcup_{y \neq x} F_{n_y}.$$

   El conjunto $\{n_y; y \in X, y \neq x\}$ es numerable. Entonces $X - \{x\}$, que no es numerable, está incluído en una unión numerable de conjuntos finitos (que es un numerable): contradicción.

2. Sea un espacio topológico (X, τ) y p un elemento que no pertenece a X. Sea $X' = X \cup \{p\}$. Se define en X' la topología dada por $\tau' = \tau \cup \{X'\}$. Estudiad los axiomas de separación de (X', τ').

   Solución. Observemos que el conjunto de cerrados es

   $$\mathcal{F}' = \{\emptyset\} \cup \{F \cup \{p\}; F \in \mathcal{F}\}.$$

   El espacio no es T_1 ya que el único entorno de p es X' (también porque si $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ no es cerrado). El espacio es T_0 si X lo es (si $x \in X$, $\mathcal{U}'_x = \mathcal{U}_x \cup \{X'\}$). Para ello, la propiedad es cierta si $x, y \in X$. Si $x \in X$ y $p \in X'$, tomamos X entorno de x. Entonces $p \notin X$, probando que X' es T_0.

   Veamos la propiedad de 'regularidad'. Sea $x \notin F' := F \cup \{p\}$. Como el único abierto que contiene al cerrado F' es X' (ya que tiene que contener a p), el espacio no es regular.

   Como dos cerrados no triviales siempre se intersecan, el espacio es normal.

3. Estudiad los axiomas de numerabilidad de la topología en $\mathbb{R}$ que tiene por base $\beta = \{(a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$.

   Solución. El espacio es ANII (y así ANI) pues $\beta' = \{(q, \infty); q \in \mathbb{Q}\}$ es una base de abiertos: si O es un abierto y $x \in O$, entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \in (a, \infty) \subset O$. En particular, $a < x$. Sea $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < x$. Entonces $x \in (q, \infty) \subset (a, \infty) \subset O$.

   El espacio es separable ya que $\mathbb{N}$ es un conjunto denso: todo elemento de β interseca a $\mathbb{N}$.

4. Probad que un subconjunto cerrado de un espacio normal también es normal.

   Solución. Sea A un subconjunto cerrado de un espacio normal X. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_A$ y $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Como $F_i = F'_i \cap A$, siendo F'_i un cerrado de X, entonces F'_i es intersección de dos cerrados de X, es decir, es un cerrado de X. Como el espacio es normal, existen abiertos O_i tales $O_i \supset F'_i$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Llamamos $G_i = O_i \cap A \in \tau_A$. Como $F_i \subset A$, entonces $G_i \supset F_i$. Por otro lado, $G_1 \cap G_2 \subset O_1 \cap O_2 = \emptyset$.