**TOPOLOGÍA. Examen del Tema 4**

**Nombre:**

1. Sea el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$. Estudiad la conexión de $(X, \tau)$ y $A = \{b, d, e\}$.

2. Probad que un subconjunto no vacío, conexo, abierto y cerrado de un espacio topológico es una componente conexa de dicho espacio.

3. Estudiad si $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \setminus \{p\}$ es arcoconexo.

4. Estudiad la conexión local de $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

1. Sea el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$. Estudiad la conexión de $(X, \tau)$ y $A = \{b, d, e\}$.

   *Solución:* Como $X = \{a\} \cup \{b, c, d, e\}$, $X$ no es conexo. Por otro lado, $\tau_{|A} = \{A, \emptyset, \{d\}, \{d, e\}\}$. Por tanto, dos abiertos no triviales siempre se intersecan, luego $A$ es conexo.

2. Probad que un subconjunto no vacío, conexo, abierto y cerrado de un espacio topológico es una componente conexa de dicho espacio.

   *Solución:* Sea $A$ un conjunto con dichas propiedades y $x \in A$. Probamos que $A = C_x$. Como $A$ es conexo, $A \subset C_x$. Por otro lado, $C_x = (C_x \cap A) \cup (C_x \cap (X \setminus A))$ es una partición por abiertos, luego $C_x \cap A = C_x$ ($\Rightarrow C_x \subset A$, luego $A = C_x$) o $C_x \cap A = \emptyset$ (imposible, ya que $A \subset C_x$).

3. Estudiad si $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \setminus \{p\}$ es arcoconexo.

   *Solución:* Después de una afinidad podemos suponer que $X = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 1, 0)\}$. Probamos que todo punto se puede unir por un conjunto arcoconexo $A$ con el punto $q = (0, -1, 0)$. Sea $(x, y, z) \in X$.

   (a) Si $z \neq 0$, se toma $A = (\mathbb{S}^1 \times \{z\}) \cup [q, (0, -1, z)]$.
   (b) Si $z = 0$, se toma $A = (\mathbb{S}^1 \times \{0\}) \setminus \{p\}$.

4. Estudiad la conexión local de $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

   *Solución:* El punto 0 no tiene ningún entorno conexo, ya que si $U$ es un entorno conexo de 0, entonces $U$ tiene que ser un intervalo. Como en $X$ los únicos intervalos que existen son los puntos, entonces $U = \{0\}$. Pero $U$ no es un entorno de 0 pues la inclusión $(-r, r) \cap A \subset U = \{0\}$ no es posible, para cada $r > 0$.