TOPOLOGÍA. Examen del Tema 3
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2007/08
Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

1. Sean dos espacios topológicos (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) y $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Probad que $\mathcal{U}^1_{x_1} \times \mathcal{U}^2_{x_2}$ es base de entornos del punto (x_1, x_2) en la topología $\tau_1 \times \tau_2$.
2. Sean dos conjuntos X e Y y $p \in X$ y $q \in Y$. Consideramos las topologías del punto incluído τ_p y τ_q en X e Y respectivamente. Denotamos por τ la topología del punto incluído en $X \times Y$ para el punto (p, q). Comparad las topologías τ y $\tau_p \times \tau_q$.
3. Denotamos por τ_S la topología de Sorgenfrey en $\mathbb{R}$. Tomamos en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la topología $\tau_S \times \tau_S$. Sea $A = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\}$. Probad que la topología inducida en A es la topología discreta.
4. Sean (X, τ), (Y, τ') dos espacios topológicos y $A \subset X \times Y$. Para cada $x \in X$ se define $A_x = \{y \in Y; (x, y) \in A\}$. Probad que si A es abierto, entonces A_x es un abierto de Y. Dad un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ de un subconjunto suyo A que no sea abierto pero que A_x sí lo sea para cada $x \in \mathbb{R}$.

TOPOLOGÍA. Examen del Tema 2
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2007/08
Profesor: Rafael López Camino

1. Sean dos espacios topológicos (X_1,τ_1) y (X_2,τ_2) y $x_1\in X_1$, $x_2\in X_2$. Probad que $\mathcal{U}^1_{x_1}\times\mathcal{U}^2_{x_2}$ es base de entornos del punto (x_1,x_2) en la topología $\tau_1\times\tau_2$.

Solución: Consideramos $\mathcal{U}^1_{x_1}\times\mathcal{U}^2_{x_2}=\{U_1\times U_2; U_1\in\mathcal{U}^1_{x_1}, U_2\in\mathcal{U}^2_{x_2}\}$. Probamos primero que $U_1\times U_2$ es un entorno de (x_1,x_2). Para ello probamos que existe un abierto $G\in\tau_1\times\tau_2$ tal que $(x_1,x_2)\in G\subset U_1\times U_2$. Como U_i es entorno de x_i, existe $O_i\in\tau_i$ tal que $x_i\in O_i\subset U_i$. Tomamos $G=O_1\times O_2$.

Sea ahora un entorno U de (x_1,x_2). Veamos que existe $U_i\in\mathcal{U}^i_{x_i}$ tal que $(x_1,x_2)\in U_1\times U_2\subset U$. Como U es entorno de (x_1,x_2), existe $O_i\in\tau_i$ tal que $(x_1,x_2)\in O_1\times O_2\subset U$. Tomamos $U_i=O_i$.

2. Sean dos conjuntos X e Y y $p\in X$ y $q\in Y$. Consideramos las topologías del punto incluído τ_p y τ_q en X e Y respectivamente. Denotamos por τ la topología del punto incluído en $X\times Y$ para el punto (p,q). Comparad las topologías τ y $\tau_p\times\tau_q$.

Solución: Si $O\in\tau_p$ y $O'\in\tau_q$, entonces el conjunto $O\times O'$ contiene al punto (p,q). En particular, $O\times O'\in\tau$. Esto prueba que $\tau_p\times\tau_q\subset\tau$. La inclusión $\tau\subset\tau_p\times\tau_q$ no es cierta. Basta con tomar $X=\{a,p\}$, $Y=X$ y $q=p$. Entonces

$$\tau=\{\emptyset, X\times X,\{(p,p)\},\{(p,p),(a,p)\},\{(p,p),(p,a)\},\{(p,p),(a,a)\},\{(p,p),(a,p),(p,a)\}\}.$$

$$\tau_p\times\tau_p=\{\emptyset, X\times X,\{(p,p)\}\}.$$

Otro ejemplo: Sea $X=Y=\mathbb{R}$, $p=0$. Sea $G=\{(0,0),(1,1)\}\in\tau$. Si fuera un abierto en la topología producto, habría $O\times O'$ tal que $(1,1)\subset O\times O'\subset G$. Como $0,1\in O$ y $0,1\in O'$, entonces $O\times O'$ tiene al menos cuatro puntos, en contradicción con que G tiene sólo dos.

3. Denotamos por τ_S la topología de Sorgenfrey en $\mathbb{R}$. Tomamos en $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ la topología $\tau_S\times\tau_S$. Sea $A=\{(x,-x); x\in\mathbb{R}\}$. Probad que la topología inducida en A es la topología discreta.

Solución: Una base de entornos de x es $\beta_x=\{[x,y), y>x\}$. Una base de entornos de $(x,-x)$ en la topología producto es $\beta_x\times\beta_{-x}=\{[x,y)\times[-x,z); y>x, z>-x\}$. Una base de entornos de $(x,-x)$ en la topología inducida es $\beta_{(x,-x)}=\{\big([x,y)\times[-x,z)\big)\cap A; y>x, z>-x\}$. Pero es evidente que

$$\big([x,y)\times[-x,z)\big)\cap A=\{(x,-x)\}.$$

Si la base de entornos de $(x,-x)$ es el conjunto formado por dicho punto, entonces la topología es la discreta.

4. Sean (X,τ), (Y,τ') dos espacios topológicos y $A\subset X\times Y$. Para cada $x\in X$ se define $A_x=\{y\in Y; (x,y)\in A\}$. Probad que si A es abierto, entonces A_x es un abierto de Y. Dad un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ de un subconjunto suyo A que no sea abierto pero que A_x sí lo sea para cada $x\in\mathbb{R}$.

Solución: La aplicación $f : Y \to X \times Y$ dada por $f(y) = (x, y)$ es continua: $p_1 \circ f$ es constante y $p_2 \circ f$ es la identidad. Es evidente que $A_x = f^{-1}(A)$, luego es un conjunto abierto.

Para el contraejemplo: Sea $A = \{0\} \times \mathbb{R}$, que no es abierto. Entonces $A_x = \emptyset$ si $x \neq 0$ y $A_0 = \mathbb{R}$, en ambos casos, conjuntos abiertos.