TOPOLOGÍA. Examen del Tema 2
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2007/08
Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

1. Se considera un conjunto X, $p \in X$, y τ la topología del punto incluído (para p). Probad que una aplicación $f : (X, \tau) \to (X, \tau)$ que satisface $f(p) = p$ es continua.

2. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología τ que tiene como base $\beta = \{[a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$. Probad que una aplicación creciente $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ es continua.

3. Hallad un homeomorfismo entre el elipsoide $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ y la esfera $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

4. Probad que el conjunto

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2 < x^2 + y^2 < 3, \ -1 < z < 1\}$$

es abierto en $\mathbb{R}^3$

TOPOLOGÍA. Examen del Tema 2
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2007/08
Profesor: Rafael López Camino

1. Se considera un conjunto X, $p \in X$, y τ la topología del punto incluído (para p). Probad que una aplicación $f : (X, \tau) \to (X, \tau)$ que satisface $f(p) = p$ es continua.

   Solución: La topología es $\tau = \{O \subset X; p \in O\} \cup \{\emptyset\}$.

   (a) (primera forma). Probamos que si $O' \in \tau$, $f^{-1}(O') \in \tau$. Para ello se prueba que $p \in f^{-1}(O')$. Esto será cierto si $f(p) \in O'$. Pero $f(p) = p$ y $O' \in \tau$.

   (b) (segunda forma) Se probó que una base de entornos es $\beta_x = \{\{x, p\}\}$. Probamos que f es continua en cada punto. Sea $x \neq p$. Dado $V' = \{f(x), p\} \in \beta_{f(x)}$, tomamos $U = \{x, p\} \in \beta_x$. Es evidente que $f(U) = \{f(x), f(p) = p\} = V'$. Si $x = p$, se toma $V' = \{p\} \in \beta_{f(p)}$ y $U = \{p\} \in \beta_p$ y es evidente que $f(U) = V'$.

2. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología τ que tiene como base $\beta = \{[a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$. Probad que una aplicación creciente $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ es continua.

   Solución: Se demostró para esta topología que una base de entornos es $\beta_a = \{[a, \infty)\}$. Probamos que es continua en todo punto. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $[f(a), \infty) \in \beta_{f(a)}$. Demostramos que $f([a, \infty)) \subset [f(a), \infty)$. Sea $x \in [a, \infty)$, es decir, $a \leq x$. Como f es una aplicación creciente, $f(a) \leq f(x)$. En particular, $f(x) \in [f(a), \infty)$.

3. Hallad un homeomorfismo entre el elipsoide $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ y la esfera $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

   Solución: Se define la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante $f(x, y, z) = (ax, by, cz)$. Esta aplicación es una afinidad ya que $a, b, c \neq 0$. Por tanto, f es un homeomorfismo. Es evidente que $f(Y) = X$. Luego $f_{|Y} : Y \to f(Y) = X$ es un homeomorfismo.

4. Probad que el conjunto

   $$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2 < x^2 + y^2 < 3,\ -1 < z < 1\}$$

   es abierto en $\mathbb{R}^3$

   Solución:

   (a) (primera forma) Las aplicaciones $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ y $g(x, y, z) = z$ son continuas. En particular, los conjuntos $f^{-1}((2, 3))$ y $g^{-1}((-1, 1))$ son abiertos en $\mathbb{R}^3$. Finalmente, $X = f^{-1}((2, 3)) \cap g^{-1}((-1, 1))$ y por tanto, es un conjunto abierto al ser intersección de dos conjuntos abiertos.

   (b) (segunda forma) Se define la aplicación $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mediante $h(x, y, z) = (x^2 + y^2, z)$. Esta aplicación es continua ya que $p_1 \circ h = f$ y $p_2 \circ h = g$. Es evidente que $X = h^{-1}((2, 3) \times (-1, 1))$ y este conjunto es abierto porque (ya se probó en clase) el rectángulo $(2, 3) \times (-1, 1)$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.