TOPOLOGÍA. Examen del Tema 1
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2007/08
Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

1. Sea X un conjunto y $A \subset X$. Para cada $x \in X$, definimos $B_x = A \cup \{x\}$. Probad que $\beta = \{B_x; x \in X\}$ es una base de topología de X. Hallad la adherencia de A.
2. Con la topología usual de $\mathbb{R}$, sea $\{x_n\}_n \to x$. Hallad el interior y la adherencia de $\{x_n\}_n \cup \{x\}$.
3. Con la topología usual de $\mathbb{R}^2$, se considera $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Describid la topología inducida en A.
4. Se considera un espacio métrico (X, d) y $A \subset X$. Si $x \in X$, se define

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a); a \in A\}.$$

Probad que $x \in \overline{A}$ sii $d(x, A) = 0$.

TOPOLOGÍA. Examen del Tema 1
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2007/08
Profesor: Rafael López Camino

1. Sea X un conjunto y $A \subset X$. Para cada $x \in X$, definimos $B_x = A \cup \{x\}$. Probad que $\beta = \{B_x; x \in X\}$ es una base de topología de X. Hallad la adherencia de A.

   Solución: Probamos las dos propiedades para β.

   (a)
   $$\bigcup_{x\in X} B_x = A \bigcup \left(\bigcup_{x\in X} \{x\} \right) = X.$$

   (b) Se tiene (si $x \neq y$)
   $$B_x \cap B_y = (A \cup \{x\}) \cap (A \cup \{y\}) = A$$
   y $A \in \beta$ porque $A = B_a$ para cualquier $a \in A$. Por tanto, si $z \in B_x \cap B_y = A$, tomamos B_a y es evidente que $z \in B_a = B_x \cap B_y$.

   Como cualquier elemento de la base β interseca a A, por la caracterización de punto adherente mediante bases de abiertos, se tiene entonces que $\overline{A} = X$.

2. Con la topología usual de $\mathbb{R}$, sea $\{x_n\}_n \to x$. Hallad el interior y la adherencia de $\{x_n\}_n \cup \{x\}$.

   Solución: Llamemos $A = \{x_n\}_n \cup \{x\}$.

   (a) Si $a \in A$ es un punto interior, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset A$: contradicción, pues A es numerable y cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ no lo es. Por tanto, $int(A) = \emptyset$.

   (b) Sea $y \in \overline{A}$. Entonces existe $\{a_n\} \subset A$ convergente a y. En particular, $\{a_n\}$ es una subsucesión de A. Las únicas que son convergentes son las que son constantes a partir de un cierto luegar –y en tal caso, $y \in A$–, o es una parcial de $\{x_n\}$ y por tanto, su límite es x. En particular, $y = x \in A$. Por tanto, hemos probado que $\overline{A} = A$.

3. Con la topología usual de $\mathbb{R}^2$, se considera $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Describid la topología inducida en A.

   Solución: Sea $p = (n, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se sabe que la familia de discos $\{B_r(p); 0 < r < 1\}$ es una base de entornos p en la topología de $\mathbb{R}^2$. Por tanto, $\{B_r(p) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}); 0 < r < 1\}$ es una base de entornos de p en la topología inducida de A. Pero es evidente que $B_r(p) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \{p\}$. En clase se había probado que la topología que tiene como base de entornos de cualquier punto el propio punto, es la topología discreta.

4. Se considera un espacio métrico (X, d) y $A \subset X$. Si $x \in X$, se define
   $$d(x, A) = \inf\{d(x, a); a \in A\}.$$
   Probad que $x \in \overline{A}$ sii $d(x, A) = 0$.

   Solución:

(a) Supongamos que $x \in \overline{A}$. Entonces existe $\{a_n\} \subset A$ tal que $\{a_n\} \to x$. En particular $\{d(x, a_n)\} \to 0$. Por tanto, en el conjunto $\{d(x, a); a \in A\}$ –que está acotado inferiormente por 0–, existe un subconjunto, a saber, $\{d(x, a_n)\}$, cuyo ínfimo es 0. Concluímos entonces que el ínfimo del primer conjunto también es 0.

(b) Supongamos que $d(x, A) = 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $0 = d(x, A) < 1/n$. Por la definición de ínfimo, existe $a_n \in A$ tal que $0 \leq d(x, a_n) < 1/n$. Tomando límites cuando $n \to \infty$, se tiene que $\{d(x, a_n)\} \to 0$. Esto quiere decir que hemos encontrado una sucesión en A, a saber, $\{a_n\}$, que converge a x. En particular, $x \in \overline{A}$.