Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Relación de ejercicios del tema 3
Actualización: 08/11/2021, hora: 14:37:25

1. Dadas las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
calcula: AB, $D+E$, $D-E$, DE, ED, BC, C^tB.

2. Dadas las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 10 \end{pmatrix},$$
calcula la matriz X 2×2 que es solución de las ecuaciones
   (a) $BX = C$.
   (b) $AX - B = C$.
   (c) $XC^t = B$.

3. Considerando matrices cuadradas de orden 2, probar mediante contraejemplos que, en general, no son ciertas las igualdades siguientes:
$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \qquad (A-B)(A+B) = A^2 - B^2.$$

4. Sea A una matriz cuadrada de orden n tal que
$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A \cdot B = B \cdot A.$$
Probar que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $A = aI_n$.

5. Calcula las inversas de las siguientes matrices:
$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Hallar el rango de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

7. Hallar el rango de las siguientes matrices según el valor de los parámetros

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & b \end{pmatrix}$$

8. Hallar la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

9. Una matriz cuadrada A se llama diagonal si $a_{ij}=0$ si $i \neq j$. Probar que una matriz diagonal es regular si y sólamente si $a_{ii} \neq 0$ para todo i. En tal caso, hallar una expresión de la matriz inversa.

10. Calcula los siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 5a \\ 4 & -2a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7a & 6a \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a \\ a & -a \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 10 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

11. Probad que las siguientes matrices son regulares y hallad sus matrices inversas:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Probad que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ satisface $A^{-1} = A^t$.

13. Comprueba que los siguientes determinantes son nulos:
$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 3+x \\ 2 & 6 & y & 8+y \\ -3 & 7 & z & 4+z \\ -5 & 5 & w & w \end{vmatrix}$$

14. Discutir y resolver según los parámetros los sistemas de ecuaciones lineales
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x+y+z & = & 1 \\ 3x+ay+az & = & 5 \\ 4x+ay & = & 5 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{lcl} ax+y+z & = & 1 \\ x+ay+z & = & a \\ x+y+az & = & a^2 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{lcl} 3x-2y+z & = & 1 \\ x+4y-5z & = & 3 \\ -x+3y+az & = & -4 \end{array} \right.$$

15. Discutir y resolver los siguientes sistemas:
$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3x-2y+z & = & 1 \\ x+4y-5z & = & 3 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x-3y+z & = & 1 \\ 2x \qquad -3z & = & a \\ x+y+2z & = & 0 \\ 2x+y-z & = & 1 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x-y+2z & = & 3 \\ ax+5y-4z & = & 1 \\ 3x+2y-z & = & 1 \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{lcl} ax+y+z & = & 0 \\ x+3y+z & = & 0 \\ 3x+10y+4z & = & 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x+t & = & a \\ x-2y+z & = & 1 \\ -x+y+az-t & = & 0 \end{array} \right.$$

16. Discutir y resolver en función de los parámetros los siguientes sistemas de ecuaciones:

   (a)
$$\left. \begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ x+y+z=2 \end{array} \right\}$$

   (b)
$$\left. \begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ x+y+z=b \\ ax+by+z=1 \end{array} \right\}$$

   (c)
$$\left. \begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ x-y+z=1 \end{array} \right\}$$

17. Resolved el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 1 \\ -x+5y+2z & = & 0 \end{array}\right.$$

18. Discutid y resolved los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en función de sus parámetros:

$$(a)\ \left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z & = & a \\ x+z & = & b \\ 2x+y+3z & = & 1 \end{array}\right. \qquad (b)\ \left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 1 \\ 3x+ay+az & = & 5 \\ 4x+ay & = & 5 \end{array}\right.$$

$$(c)\ \left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 1 \\ 2x-y+3z & = & 5 \\ 3x+4y-2z & = & 2 \\ x+3y-2z & = & a \end{array}\right. \qquad (d)\ \left\{\begin{array}{lcl} ax+by+z & = & 1 \\ x-y+3z & = & 2 \end{array}\right.$$