Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 24 de noviembre de 2021
Actualización: 24/11/2021, hora: 16:47:11

Ejercicio resuelto 1. Según el parámetro a, hallar la matriz escalonada por filas de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución. Para trabajar mejor, intercambiamos la primera y tercera fila:

$$A \overset{F_{31}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix} \overset{F_{21}(-2),F_{31}(-2)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & a-2 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_2(-\frac{1}{2})}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & a-2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_{32}(2-a)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -2+\frac{3}{2}a \end{pmatrix}$$

No sabemos si el elemento $(3,3)$ es 0, es decir, cuando $-2+3a/2=0$, es decir, si a es $4/3$ o no.

1. Caso $a = 4/3$. Entonces la matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y hemos acabado. El rango es 2.

2. Caso $a \neq 4/3$.

$$= \overset{F_3(-\frac{2}{3a-4})}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el rango es 3.

Vamos a calcular el rango de la matriz por determinantes, que resulta más "sistemático".

Ejercicio resuelto 2. Hallar el rango de la matriz anterior por determinantes.

Solución. La matriz es de orden 3, luego el rango es como mucho 3. Vamos a discutir el rango de dos maneras: empezando por menores de orden más pequeño y aumentando el orden de los menores; y empezando por menores de orden más grande y reduciendo el orden.

Por la primera forma es más "sistemática"; por la segunda, en este caso, puede ser más rápido.

1. El menor del lugar $(1,1)$ es $|2| = 2 \neq 0$, luego $r(A) \geq 1$. Añadimos filas y columnas a éste. Tenemos cuatro posibilidades, en dos de ellas (con la segunda columna) interviene el parámetro a. No pasa nada si trabajamos con él, pero como podemos evitarlo con la tercera columna, probamos primero así. Por tanto, añadiendo la tercera columna y, la fila 2 o la fila 3, tenemos dos menores de orden 2. El primero es

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

que es suficiente para asegurarse *ya* que $r(A) \geq 2$. Por último, calculamos los menores de orden 3 resultantes de añadir filas y columnas a éste de orden 2. Pero sólo hay un menor:

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Su determinante es $3a-4$. Por tanto:

a) Caso $3a-4=0$, es decir, $a=4/3$, el menor es 0, luego $r(A)<3$, concluyendo $r(A)=2$.

b) Caso $3a-4\neq 0$, es decir, $a\neq 4/3$, entonces el menor no es 0, luego $r(A)\geq 3$, concluyendo $r(A)=3$.

2. El menor de orden mayor es el determinante de la matriz. Hallamos este determinante, que es $3a-4$.

a) Caso $3a-4=0$, es decir, $a=4/3$, el menor es 0, luego $r(A)<3$. Ahora cogemos menores de orden 2. Comparando en este preciso momento con el método de empezar con menores de orden más pequeño, observamos que tenemos 9 posibilidades, y no sabemos bien cuál elegir (en el caso anterior, era añadir filas y columnas a menores que ya teníamos asegurados). De todas formas, *y porque en este caso es sencilla la matriz*, si tomamos el menor de la esquina izquierda-abajo, tenemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

luego el determinante no es 0. Esto dice que $r(A)\geq 2$, concluyendo $r(A)=2$.

b) Caso $3a-4\neq 0$, es decir, $a\neq 4/3$, entonces el menor no es 0, luego $r(A)\geq 3$, concluyendo $r(A)=3$ pues el orden de la matriz es 3.

Ejercicio resuelto 3. Según el parámetro a, hallar el rango por determinantes de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

Solución. Como hay menores de orden 1 no nulos, $r(A) \geq 1$. Por otro lado, la matriz es 3×2, luego $r(A) \leq 2$. Cogemos un menor no nulo, por el ejemplo 3, y añadimos filas (hay dos) y columnas (sólo hay una). Con la segunda fila,

$$\begin{vmatrix} 3 & a \\ a & 2 \end{vmatrix} = 6 - a^2.$$

Igualamos a cero, obteniendo $a = \pm\sqrt{6}$.

1. Caso $a \neq \pm\sqrt{6}$. El menor es no nulo, luego $r(A) \geq 2$. Esto concluye que $r(A) = 2$.

2. Caso $a = \pm\sqrt{6}$. El menor anterior es nulo, luego tenemos que seguir con el otro menor, pero teniendo en cuenta que ahora a no es arbitrario, sino que vales $\pm\sqrt{6}$.

$$\begin{vmatrix} 3 & a \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a = \pm 2\sqrt{6} \neq 0.$$

   Como el menor no es cero, entonces $r(A) \geq 2$, y como antes, $r(A) = 2$.

$\square$