

Óptica y Optometría: curso 1⁰-A,
 Asignatura: Matemáticas I
 Fecha: 22 de septiembre de 2021
 Actualización: 22/09/2021, hora: 20:31:01

Ejercicio resuelto 1. Hallar las asíntotas de $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$.

Solución. 1. Verticales. Es la recta $x = 1$, pues

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2}{x-1} = \infty.$$

2. Horizontales. No tiene, pues

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x-1} = \infty.$$

3. Oblícuas. Es la recta $y = mx + n$, donde

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - x} = 2.$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x-1} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1} = 2.$$

Luego la asíntota es $y = 2x + 2$.

Ejercicio resuelto 2. Hallar

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x-4} \right)^{2x+3}.$$

Solución. Al sustituir nos queda 1^∞ que es una indeterminación. Aplicamos logaritmos, y hallamos el límite del logaritmo, luego hacemos el proceso inverso, o dicho de otra manera, si $\lim_{x \rightarrow a} \log y(x) = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} y(x) = e^L$.

$$y = \left(\frac{x-1}{x-4} \right)^{2x+3} \rightsquigarrow \log y = \log \left(\frac{x-1}{x-4} \right)^{2x+3} = (2x+3) \log \frac{x-1}{x-4}.$$

Este límite es $\infty \cdot \log(1) = \infty \cdot 0$, que es una indeterminación. Lo pasamos a un cociente $\frac{0}{0}$:

$$\log y = \frac{\log \frac{x-1}{x-4}}{\frac{1}{2x+3}}$$

y aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log \frac{x-1}{x-4})'}{(\frac{1}{2x+3})'}.$$

Hacemos aparte cada una de esas derivadas:

$$\left(\log \frac{x-1}{x-4}\right)' = \frac{1}{\frac{x-1}{x-4}} \left(\frac{x-1}{x-4}\right)' = \frac{1}{\frac{x-1}{x-4}} \frac{-3}{(x-4)^2} = -\frac{3}{(x-1)(x-4)}.$$

Para la siguiente derivada, o aplicamos la derivada del cociente, o la derivada de $1/y$. En éste último caso, sabemos $(1/y)' = -y'/y^2$, luego

$$\left(\frac{1}{2x+3}\right)' = -\frac{2}{(2x+3)^2}.$$

Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log y = \frac{-\frac{3}{(x-1)(x-4)}}{-\frac{2}{(2x+3)^2}} = \frac{3}{2} \frac{(2x+3)^2}{(x-1)(x-4)} \rightarrow \frac{3}{2} \cdot 4 = 6.$$

Acabamos, pues, afirmando que $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = e^6$.

Ejercicio resuelto 3. Hallar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - \sin x}.$$

Solución. Al sustituir en $x = 0$, nos queda la indeterminación $\frac{0}{0}$, luego aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + \tan^2(x) - \cos(x)}.$$

Sustituimos y nos queda de nuevo $\frac{0}{0}$. Por tanto, de nuevo por la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + \tan^2(x) - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \tan(x)(1 + \tan^2(x)) + \sin(x)}.$$

Si sustituimos, de nuevo es $\frac{0}{0}$, pero observemos que podemos simplificar el $\sin(x)$ en el numerador y denominador:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin(x) \left(\frac{2}{\cos x}(1 + \tan^2(x)) + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{2}{\cos x}(1 + \tan^2(x)) + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2(1 + \tan^2(x)) + 1} = \frac{1}{3}.$$

Ejercicio resuelto 4. Hallar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}.$$

Solución. Al sustituir en $x = 0$, nos queda la indeterminación $\frac{0}{0}$, luego aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2(e^x - 1)e^x}.$$

De nuevo es $\frac{0}{0}$: seguimos...

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2e^x e^x + 2(e^x - 1)e^x} = \frac{1}{2}.$$