Tema 2- Curso 1^0-B, Ciencias Ambientales
Asignatura: Matemáticas
Fecha: 30 de octubre de 2020
Actualización: 30/10/2020, hora: 06:33:47

Vamos a hacer tres integrales donde el integrando tiene apenas variaciones. En todas ellas usaremos el método de sustitución.

Ejercicio resuelto 1.

$$(a)\int \frac{4}{x^2+9}\,dx, \quad (b)\int \frac{4x}{x^2+9}\,dx, \quad (c)\int \frac{4x^2}{x^2+9}\,dx.$$

SOLUCIÓN.

1. La integral es parecida a la arco tangente $\int \frac{1}{1+x^2}$. El numerador es una constate que sale fuera. El "problema" es el 9. Lo que hacemos es dividir numerador y denominador por 9:

$$= 4\int \frac{\frac{1}{9}}{\frac{x^2}{9}+\frac{9}{9}}\,dx = \frac{4}{9}\int \frac{1}{(\frac{x}{3})^2+1}\,dx.$$

Hacemos la sustitución $t = x/3$:

$$t = \frac{x}{3} \rightsquigarrow dt = \frac{dx}{3} \rightsquigarrow dx = 3\,dt.$$

$$= 3\frac{4}{9}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{4}{3}\arctan(t)+c = \frac{4}{3}\arctan(\frac{x}{3})+c.$$

2. No podemos hacer lo mismo que antes porque ahora el numerador no es una "constante" sino una función de x. Sin embargo, observamos que la derivada del denominador es $2x$ que es, salvo una constate, el numerador. Esto nos indica que la integral es del tipo logaritmo: $\int \frac{1}{x}$.

$$t = x^2+9 \rightsquigarrow dt = 2x\,dx \rightsquigarrow dx = \frac{dt}{2x}.$$

$$\int \frac{4x}{x^2+9}\,dx = \int \frac{4x}{t}\frac{dt}{2x} = 2\int \frac{1}{t}\,dt = 2\log(t)+c = 2\log(t^2+1)+c.$$

3. Tenemos un cociente de polinomios donde el numerador NO tiene grado menor que el denominador (como sí ocurría en los otros dos casos). Entonces dividimos para

que el numerador tenga grado menor[1]:

$$\begin{array}{r} \left(\quad 4x^2 \right) \div \left(x^2+9\right) = 4 + \dfrac{-36}{x^2+9} \\ -\,4x^2 - 36 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline -\,36 \qquad\qquad\qquad\qquad \end{array}$$

El cociente es 5 y el resto es -36. De la fórmula (aparece en teoría)

$$\text{dividendo} = (\text{divisor})\cdot(\text{cociente})+(\text{resto})$$

tenemos

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}.$$

En nuestro caso

$$\text{dividendo}=4x^2 \quad (\text{divisor})=x^2+9 \quad \text{cociente}=4 \quad \text{resto}=-36,$$

luego

$$\frac{4x^2}{x^2+9} = 4 + \frac{-36}{x^2+9}.$$

Por tanto

$$\int \frac{4x^2}{x^2+9}\,dx = \int 4\,dx - 36\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = 4x - 36\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$$

y la última integral apareció en el primer apartado.

□

La siguiente integral es parecido pero ahora es de tipo arco seno.

Ejercicio resuelto 2.

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

SOLUCIÓN. La integral de tipo arcoseno es $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. El numerador no es una “constante”, pero como hay un sumando, lo separamos en dos, y el primero va a ser de tipo potencia:

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$$

En la primera integral, la derivada del radicando es $-2x$ que es justo el numerador salvo constante, luego hacemos $t = 4-x^2$:

$$t = 4-x^2 \rightsquigarrow dt = -2x\,dx \rightsquigarrow dx = -\frac{d}{2x}.$$

[1]El editor de textos no hace expresa mejor la división.

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\int \frac{x}{\sqrt{t}}\,\frac{dt}{2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{1/2}}{1/2} + c = -(4-x^2)^{1/2} + c.$$

La segunda integral sí es de tipo arcoseno, pero como en ejercicio anterior (a), no sale un 1. Entonces dividimos numerador y denominador por 2 para que al entrar en la raíz sea un 4:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{4}{4}-\frac{x^2}{4}}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\,dx$$

Ahora hacemos $t = x/2$, luego $dx = 2dt$,

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin(t) + c = \arcsin(\frac{x}{2}) + c.$$