

Tema 1- Curso 1⁰-B, Ciencias Ambientales

Asignatura: Matemáticas

Fecha: 30 de septiembre de 2020

Actualización: 01/10/2020, hora: 16:45:47

Ejercicio resuelto 1. Según el parámetro $a \in \mathbb{R}$, estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada a trozos como

$$f(x) = \begin{cases} a + \sin(x^2 + 1), & x \geq 0 \\ e^x, & x < 0. \end{cases}$$

Solución. Nos preguntan *en qué puntos la función $f(x)$ es continua*. Sin embargo, la existencia de un parámetro nos indica que tenemos muchos (infinitos) problemas, porque a cada valor que se le a a (por ejemplo $a = 3$), tenemos un problema diferente. No nos pregunta cuando a toma un valor particular, digamos $a = 7$, sino que a es *arbitrario*.

Como la función está definida a trozos. La continuidad es una cuestión local, lo que le pasa a la función alrededor de un punto. Está claro que el punto $x = 0$ es especial porque a la derecha y a la izquierda del mismo, el comportamiento es diferente.

1. Caso $x_0 > 0$. De nuevo, la cuestión es local, y está claro que f alrededor de x_0 es la función $a + \sin(x^2 + 1)$. Según la definición de continuidad (apuntes), hay que hallar el límite, el valor de la función en el punto y estudiar si son iguales.

Como las funciones involucradas son polinomios y trigonométricas, y todas continuas, el límite en x es evaluar. Así

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a + \sin(x_0^2 + 1).$$

Por otro lado, $f(x_0) = a + \sin(x_0^2 + 1)$. Son iguales, luego f es continua (independientemente de a):

2. Caso $x_0 < 0$. Ahora la función es e^x , luego

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = e^{x_0},$$

que es $f(x_0)$, luego coincide y f es continua en x_0 (independientemente de a).

3. Caso $x_0 = 0$. Para hallar los límites no basta con evaluar, porque la función a los dos lados de 0 es diferente. Por esta razón, hallamos los límites laterales, donde la función sí está controlada.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} a + \sin(x^2 + 1) = a + \sin(1).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1.$$

Siguiendo la teoría (apuntes), para que haya límite los límites laterales deben ser iguales, luego

$$a + \sin(1) = 1.$$

De aquí concluimos que $a = 1 - \sin(1)$, es decir, *sólo hay límite en $x = 0$ cuando $a = 1 - \sin(1)$* , y en tal caso, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Para acabar con la continuidad, el límite debe ser igual que el valor de la función en $x = 0$. Ya que $f(0) = 1 + \sin(0^2 + 1) = 1 - \sin(1) + \sin(1) = 1$, entonces f es continua.

Conclusión: la función es continua en todos los puntos distintos de $x = 0$, independientemente del parámetro. En $x = 0$, sólo es continua si $a = 1 - \sin(1)$.

♣ El razonamiento se puede simplificar observando que la función es continua ciertos intervalos abiertos, y reduciendo el trabajo sólo en $x = 0$. \square

Modificamos un poco el ejercicio anterior, cambiando el valor de $f(x)$ en $x = 0$.

Ejercicio resuelto 2. Según el parámetro $a \in \mathbb{R}$, estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada a trozos como

$$f(x) = \begin{cases} a + \sin(x^2 + 1), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ e^x, & x < 0. \end{cases}$$

Solución. Todo sigue parecido. Para los puntos $x > 0$ y $x < 0$, tenemos la misma conclusión, y la función es continua en dichos puntos.

Ahora cambiar porque el valor de la función ha cambiado en $x = 0$. Primero calculamos el límite de f en $x = 0$. Esto es lo mismo, obteniendo que sólo hay límite si $a = 1 - \sin(1)$, y este límite es 1. Ahora tenemos que ver la igualdad

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0).$$

Ahora tenemos $1 \neq 0$. Por tanto, aunque la función tiene límite, éste no coincide con $f(0)$.

Conclusión: la función es continua en todos los puntos distintos de 0 para cualquier valor del parámetro a . En $x = 0$, la función no es continua (aunque tiene límite). Esta discontinuidad es evitable, porque si definimos ahora la función

$$g(x) = \begin{cases} a + \sin(x^2 + 1), & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ e^x, & x < 0, \end{cases}$$

entonces g es continua en $x = 0$ y coincide con f en todos los puntos excepto en $x = 0$. \square

Ejercicio resuelto 3. Estudiar la continuidad de la función $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada a trozos como

$$f(x) = \begin{cases} x^{\sin(x)} - x^{e^x}, & x > 1 \\ 4, & x = 1 \\ \frac{(x+1)(x-2)}{x^2}, & x < 1, x \neq 0 \\ 5, & x = 0. \end{cases}$$

Solución. La función está definida a trozos y en cada uno de los intervalos $(1, \infty)$, $(0, 1)$ y $(-\infty, 0)$, la función está definida por funciones continuas. Por tanto, en todos los puntos de dichos intervalos, la función es continua. Falta estudiar los puntos $x = 0$ y $x = 1$. Primero hallamos los límites, y cómo la función se comporta diferente a un lado que a otro, hacemos límites laterales.

1. Caso $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^{\sin(x)} - x^{e^x} = 1^{\sin(1)} - 1^{e^1} = 1 - 1 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} = \frac{2 \cdot (-1)}{1^2} = -2.$$

Los límites son diferentes, luego no hay límite, y por tanto, f es discontinua en $x = 1$.

2. Caso $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} = -\infty.$$

Aquí vemos que el denominador, cerca de $x = 0$ es positivo. Para el numerador, $x + 1$ es positivo, y $x - 2$ es negativo. Por ello sale $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} = -\infty.$$

La razón es la misma. Como el límite es infinito, entonces no hay límite, luego la función no es continua en $x = 0$.

♣ Si la función fuera $g(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)(x-2)}{x} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+1)(x-2)}{x} = +\infty.$$