

Tema 2- Curso 1⁰-B, Ciencias Ambientales
 Asignatura: Matemáticas
 Fecha: 28 de octubre de 2020
 Actualización: 27/10/2020, hora: 19:37:16

Las siguientes integrales son por sustitución (o “casi inmediatas”).

Ejercicio resuelto 1. Hallar:

1. $\int \sqrt[3]{x} dx$.
2. $\int \frac{1}{x^2} dx$.
3. $\int x(x^2 + 3) dx$.
4. $\int \frac{1}{(2x)^3} dx$.
5. $\int (\sqrt[4]{x^3} + 1) dx$.

SOLUCIÓN. 1. Lo mejor es poner el integrando en forma de potencia: $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$. En tal caso, la integral es inmediata:

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/3} dx = \frac{x^{1+\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}} + c = \frac{3}{4} \cdot x^{4/3} + c.$$

2. La integral es inmediata:

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c.$$

3. Dos maneras de hacer la integral: quitando paréntesis y queda un polinomio, luego es inmediato: $\int (x^3 + 3x) dx$, o, como lo vamos a hacer, observando que la derivada del paréntesis es $2x$ que es “casi” el x que está multiplicando. Por tanto

$$t = x^2 + 3 \rightsquigarrow dx = 2x \cdot dt$$

$$\int x(x^2 + 3) dx = \int \cancel{x} \cdot t \frac{dt}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2} \int t dt = \frac{1}{2} \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{4} (x^2 + 3)^2 + c.$$

4. Dos manera para hacer la integral: se saca fuera el 2 pues está multiplicando, quedando una inmediata, o se hace una sustitución $t = 2x$ para que quede una integral. Hacemos el primer caso:

$$\int \frac{1}{(2x)^3} dx = \frac{1}{2^3} \int \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{8} \int x^{-3} dx = \frac{1}{8} \frac{x^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{16} \frac{1}{x^2} + c.$$

5. Como es una suma de funciones, se separa en dos integrales, y cada una de ellas es inmediata:

$$\int (\sqrt[4]{x^3} + 1) dx = \int \sqrt[4]{x^3} dx + \int 1 dx = \int x^{-3/4} dx + x = \frac{x^{-3/4+1}}{-3/4+1} + x + c = 4x^{1/4} + x + c.$$

□

Ejercicio resuelto 2. Hallar:

1. $\int 2x(x^2 + 1)^2 dx.$
2. $\int 5\sqrt{5x+1} dx.$
3. $\int \sqrt{2x-1} dx$ (versión 1).
4. $\int x\sqrt{2x-1} dx$ (versión 2).
5. $\int x\sqrt{x^2-1} dx.$

SOLUCIÓN. 1. Dos manera de hacer: se eleva al cuadrado y se multiplica por $2x$, obteniendo un polinomio, quedando integrales inmediatas, o (mejor, porque en el otro caso, nos queda 3 sumandos), vemos que la derivada del paréntesis es $2x$, que está fuera. Por tanto

$$t = x^2 + 1 \rightsquigarrow dt = 2x \cdot dx \rightsquigarrow dx = \frac{dt}{2x}$$

$$\int 2x(x^2 + 1)^2 dx = \int 2x t^2 \frac{1}{2x} dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{(x^2 + 1)^3}{3} + c.$$

2. La derivada de lo de dentro de la raíz es 5, luego

$$t = 5x + 1 \rightsquigarrow dt = 5 dx \rightsquigarrow dx = \frac{1}{5} dt$$

$$\int 5\sqrt{5x+1} dx = \int 5\sqrt{t} \frac{1}{5} dt = \int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}(5x+1)^{3/2} + c.$$

3. Por la misma razón que antes,

$$t = 2x - 1 \rightsquigarrow dx = \frac{1}{2} dt \rightsquigarrow dt = 2 dx$$

$$\int \sqrt{2x-1} dx = \int \sqrt{t} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} + c = \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + c.$$

4. La derivada de dentro es 2, que NO es x , pero vamos a hacer la misma sustitución:

$$\int x\sqrt{2x-1} dx = \int x\sqrt{t} \frac{dt}{2}.$$

Tenemos que quitar la variable x y ponerla en función de t . Si fuera una integral “cualquiera” sería un problema. La ventaja aquí es que de $t = 2x - 1$, al despejar x (*éste no es el problema*) y ponerlo en el integrando, nos queda una integral que es casi inmediata. Lo vemos. De $t = 2x - 1$, tenemos $x = (t + 1)/2$, luego

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2}(t+1)\sqrt{t} dt = \frac{1}{4} \int (t+1)\sqrt{t} dt.$$

Multiplicamos el paréntesis por la raíz y lo ponemos en forma de potencia:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \int (t\sqrt{t} + \sqrt{t}) dt = \frac{1}{4} \int (t^{1+\frac{1}{2}} + t^{1/2}) dt = \frac{1}{4} \int (t^{3/2} + t^{1/2}) dt \\ &= \frac{1}{4} \int t^{3/2} dt + \frac{1}{4} \int t^{1/2} dt = \frac{1}{4} \frac{t^{5/2}}{5/2} + \frac{1}{4} \frac{t^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{10}(2x-1)^{5/2} + \frac{1}{6}(2x-1)^{3/2} + c. \end{aligned}$$

5. La derivada de lo que hay dentro de la raíz es $2x$ que es, salvo una constante multiplicativa, lo que hay fuera. Por tanto,

$$t = x^2 - 1 \rightsquigarrow dt = 2x dx \rightsquigarrow dx = \frac{dt}{2x}.$$

$$\int x\sqrt{x^2-1} dx = \int x\sqrt{t} \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int t^{1/2} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2} + c.$$