Tema 1- Curso 1^0-B, Ciencias Ambientales
Asignatura: Matemáticas
Fecha: 27 de octubre de 2020
Actualización: 27/10/2020, hora: 07:14:43

Ejercicio resuelto 1. *Hallar los siguientes límites:*

1. $\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{x^2-7}}{x-4}$.
2. $\lim_{x\to 3} \frac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}$.
3. $\lim_{x\to 1} \sqrt[x-1]{x}$.
4. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10}$.
5. $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{2/x}$.
6. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$.
7. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{3-x}{2+x}\right)^x$.
8. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^2-x+1}{x^2+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.
9. $\lim_{x\to 0} \frac{sin^3(x)}{\tan(x)-\sin(x)}$.

SOLUCIÓN. 1. Al sustituir, queda $\frac{0}{0}$. Multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador:

$$\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{x^2-7}}{x-4}\frac{3+\sqrt{x^2-7}}{3+\sqrt{x^2-7}} = \lim_{x\to 4} \frac{9-(x^2-7)}{(x-4)(3+\sqrt{x^2-7})} = \lim_{x\to 4} \frac{16-x^2}{(x-4)(3+\sqrt{x^2-7})}.$$

Al sustituir, queda $\frac{0}{0}$: simplificamos el numerador:

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(4-x)(4+x)}{(x-4)(3+\sqrt{x^2-7})} = \lim_{x\to 4} \frac{-(4+x)}{(3+\sqrt{x^2-7})} = -\frac{8}{6}.$$

2. Al sustituir queda $\frac{0}{0}$: multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador, para así quitarnos la raíz cuadrada:

$$\lim_{x\to 3} \frac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}\frac{1+\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to 3} \frac{1-(x-2)}{(x^2-9)(1+\sqrt{x-2})} = \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{(x^2-9)(1+\sqrt{x-2})}$$

Al sustituir, queda de nuevo $\frac{0}{0}$, pero podemos simplificar $3-x$:

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-1}{(x+3)(1+\sqrt{x-2})} = \frac{-1}{6\cdot(1+\sqrt{1})} = -\frac{1}{12}.$$

3. La función es $x^{1/(x-1)}$. Al sustituir, queda 1^{∞}, luego primero hacemos

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}(x-1) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}(x-1) = 1.$$

   Por tanto, el límite es $e^1 = e$.

4. Al sustituir, queda $\frac{0}{0}$ que es una indeterminación. Pero como en este caso, tenemos en el numerador y en el denominador dos polinomios, esto quiere decir que $x=2$ es una raíz de ambos. Por tanto, lo que hacemos es factorizar para *simplificar*: en verdad no hace falta tanto, sólo sacar $(x-2)$ de ambos y eso es lo que hacemos. En el denominador, al ser un polinomio de segundo grado, la descomposición es $(x-2)(x+5)$. En el numerador aplicamos Ruffini sabiendo *ya* que 2 es una raíz, y obteniendo $(x-2)(x^2-6)$. Por tanto,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-6)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-6}{(x+5} = -\frac{2}{7}.$$

5. Sustituyendo queda 1^{∞}, luego es del número e. Por la fórmula, primero hacemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{((1+3x)-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{x} = 6.$$

   Por tanto, el límite que se pide es e^6.

6. Sustituyendo queda $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos L'ôpital:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}} = 2.$$

7. Sustituyendo, queda $(3/2)^0 = 1$.

8. El límite de dentro es 1 y el del exponente, ∞, luego es 1^{∞} y la indeterminación es del número e. Entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+2}-1\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x}\frac{-x-1}{x^2+2} = -1.$$

   Por tanto, el límite pedido es $e^{-1} = 1/e$.

9. Al sustituir, nos queda $\frac{0}{0}$. Simplificamos

$$\frac{\sin^3(x)}{\tan(x)-\sin(x)} = \frac{\sin^3(x)}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\sin(x)} = \frac{\sin^3(x)\cos(x)}{\sin(x)-\sin(x)\cos(x)} = \frac{\sin^3(x)\cos(x)}{\sin(x)(1-\cos(x))} = \frac{\sin^2(x)\cos(x)}{1-\cos(x)}$$

$$= \frac{(1-\cos^2(x))\cos(x)}{1-\cos(x)} = \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))\cos(x)}{1-\cos(x)} = (1+\cos(x))\cos(x)$$

y el límite en $x=0$ es $(1+1)\cdot 1 = 2$.