Tema 1- Curso 1^0-B, Ciencias Ambientales
Asignatura: Matemáticas
Fecha: 23 de octubre de 2020
Actualización: 23/10/2020, hora: 10:26:22

Ejercicio resuelto 1. *Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es* 10 *y que el producto de sus cuadrados es máximo.*

SOLUCIÓN. Llamamos a uno x y el otro es necesariamente $10-x$. Por tanto su producto es $x(10-x)$ y ésta es la función a la que hallar el máximo. Sea $f(x) = x(10-x) = 10x - x^2$. Entonces $f'(x) = 10-2x$, igualamos a cero, obteniendo $x = 5$. La derivada segunda es $f''(x) = -2$, luego efectivamente es un máximo. Los dos números son 5 y $10-5 = 5$. □

Ejercicio resuelto 2. *Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio de cada uno de estos materiales es* 2 *y* 3 *euros por centímetro cuadrado, respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser* 1 *metro. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo?*

SOLUCIÓN. Al lado de uno lo llamamos x y el otro y. El área del primero es x^2 y el del segundo, y^2. El precio de la primera chapa es $2x^2$ y el de la segunda, $3y^2$. El perímetro del primero es $4x$ y el del segundo, $4y$. Por tanto,

$$4x + 4y = 1 \rightsquigarrow y = \frac{1}{4} - x.$$

El coste total es

$$f(x) = 2x^2 + 3(\frac{1}{4} - x)^2 =$$

Derivamos,

$$f'(x) = 4x - 6(\frac{1}{4} - x) \rightsquigarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{20}.$$

La derivada segunda es

$$f''(x) = 4 + 6 = 10 > 0,$$

luego es un mínimo. La solución es: el lado de la primera chapa es $3/20m = 15cm.$ y el de la segunda $1/10m = 10cm.$. □

Ejercicio resuelto 3. *De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación* $x/2 + y = 1$, *determina el que tiene mayor área.*

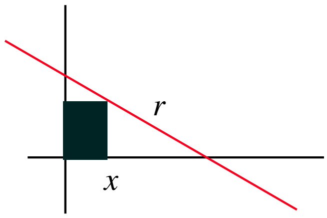

Figura 1:

SOLUCIÓN. Los vértices son $(0,0)$, $(x,0)$, (x,y) e $(0,y)$. Como el vértice (x,y) se encuentra en la recta, entonces $y = 1 - x/2$. El área es base por altura, luego

$$f(x) = xy = x(1 - \frac{x}{2}) \rightsquigarrow f'(x) = 1 - x \rightsquigarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

La derivada segunda es $f''(x) = -1 < 0$, luego es un máximo. Luego los vértices son $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1/2)$ y $(0,1/2)$.

Ejercicio resuelto 4. *Sea $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \log(x)$. Determinar los intervalos de monotonía y extremos relativos.*

SOLUCIÓN. Hallamos la derivada e igualamos a 0.

$$f'(x) = 2x\log(x) + x^2\frac{1}{x} = x(2\log(x) + 1) \rightsquigarrow f'(x) = 0 \rightsquigarrow x = 0, x = e^{-1/2}.$$

Pero como $x = 0$ no está en el dominio, sólo es $x = e^{-1/2}$. Por tanto, El punto $x = e^{-1/2}$

	$(0, e^{-1/2})$	$(e^{-1/2}, \infty)$
signo f'	-	+
función	decreciente	creciente

es un mínimo relativo.

Ejercicio resuelto 5. *Para la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, hallar los extremos relativos y asíntotas.*

SOLUCIÓN. 1. Derivamos,

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2), \rightsquigarrow f'(x) = 0 \text{ si } x = 0, 2.$$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
signo f'	-	+	-
función	decreciente	creciente	decreciente

Para averiguar el signo, e^{-x} tiene signo positivo, por tanto el signo es el de $2x-x^2$ (es una parábola “hacia abajo”). Por tanto $x=0$ es un mínimo relativo y $x=2$ es un máximo relativo.

2. Como la función está definida en todo $\mathbb{R}$, no tiene asíntotas verticales. Para las horizontales, y por L'ôpital,

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = +\infty.$$

Por tanto, $y=0$ es una asíntota horizontal por la derecha.

Para las oblículas, por la derecha no tiene. Veamos por la izquierda:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty.$$

Luego no tiene. $\square$

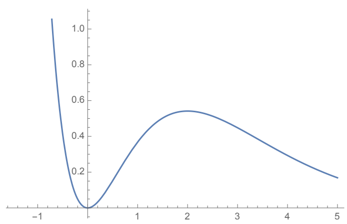

Figura 2: