

Tema 1- Curso 1<sup>0</sup>-B, Ciencias Ambientales

Asignatura: Matemáticas

Fecha: 22 de octubre de 2020

Actualización: 22/10/2020, hora: 07:23:56

**Ejercicio resuelto 1.** Hallar los puntos de corte con los ejes de abscisas, intervalos de monotonía, convexidad, extremos relativos, y asíntotas de la función  $f(x) = \frac{x^4+3}{x}$ .

**Solución.** La función no está definida en  $x = 0$ . Este punto hay que tenerlo en cuenta para los intervalos de monotonía y convexidad así como las asíntotas verticales.

1. Hacemos  $y = 0$ , es decir,  $x^4 + 3 = 0$ , y no hay solución, luego no tiene intersección con el eje de abscisas. Por otro lado tampoco con el de ordenadas porque la función no está definida en  $x = 0$ .
2. Hallamos la primera derivada e igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 3}{x^2} \rightarrow 3x^4 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

El punto  $x = -1$  es un máximo relativo y  $x = 1$  un mínimo relativo.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
signo $f'$	+	-	-	+
función	creciente	decreciente	decreciente	creciente

3. Hallamos la derivada segunda, igualamos a cero, y damos valores en puntos intermedios, junto con el punto  $x = 0$ .

$$f''(x) = \frac{6x^4 + 6}{x^3} \rightarrow 6x^4 + 6 = 0 \Rightarrow \text{no tiene solución.}$$

	$(-\infty, 0)$	$0 (0, \infty)$
signo $f''$	-	+
función	cóncava	convexa

4. a) Ya que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3}{x} = \frac{3}{0} = \infty,$$

la recta  $x = 0$  es una asíntota vertical.

b) Para las asíntotas horizontales,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 + 3}{x} = \infty,$$

luego no tiene.

c) Si  $y = mx + n$  es una asíntota oblicua (por uno de los lados), entonces

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 + 3}{x^2} = \infty,$$

luego tampoco tiene.

**Ejercicio resuelto 2.** Para la función  $f(x) = \log(x^2 + 1)$ , hallar los puntos de corte, simetrías, intervalos de monotonía y convexidad, y extremos relativos y puntos de inflexión. También las asíntotas.

**Solución.** El dominio de la función es  $\mathbb{R}$ , luego no tiene asíntotas verticales.

1. Si hacemos  $y = 0$ , entonces  $x^2 + 1 = 1$ , luego  $x = 0$  es el punto de intersección con el eje de abscisas y por tanto, también con de ordenadas.
2.  $f(-x) = \log((-x)^2 + 1) = \log(x^2 + 1) = f(x)$ , luego es simétrica respecto del eje  $y$ , es decir, es una función par.
3. Hallamos la primera derivada e igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Los intervalos de monotonía son: Por tanto  $x = 0$  es un mínimo relativo.

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
signo $f'$	-	+
función	decreciente	creciente

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
signo $f'$	-	+	-
función	cóncava	convexa	cóncava

4. Hallamos la derivada segunda e igualamos a cero:

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Por tanto, los intervalos de convexidad son  $x < -1$  y  $x > 1$ . Los puntos de inflexión son  $x = 1$  y  $x = -1$ .

5. Para las asíntotas horizontales,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \log(x^2 + 1) = \log(\infty) = \infty,$$

luego no tiene asíntotas horizontales. Para las oblicuas, y por L'Hôpital,

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\log(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{1} = 0,$$

luego no tiene.