Tema 1- Curso 1^0-B, Ciencias Ambientales
Asignatura: Matemáticas
Fecha: 21 de octubre de 2020
Actualización: 21/10/2020, hora: 08:15:13

Ejercicio resuelto 1 (optimización)**.** Hallar qué puntos de la parábola $y = 5/2 - x^2$ están más próximos al origen de coordenadas.

Solución. La distancia de un punto (x,y) al origen de coordenadas es $\sqrt{x^2+y^2}$. Pero como es el cuadrado de una función positiva, basta estudiar la función x^2+y^2. En nuestro caso, x e y no son arbitrarios, pues están condicionados a pertenecer a la parábola. Por tanto, $y = 5/2 - x^2$, y la función es $f(x) = x^2 + (5/2 - x^2)^2$: Hallamos la primera derivada e igualamos a cero:

$$f'(x) = 2x - 2(\frac{5}{2} - x^2)2x = 2x(1 - 5 + 2x^2) \to 4x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}.$$

Ahora hacemos la derivada segunda:

$$f''(x) = 12x^2 - 8 \to \begin{cases} f''(0) = -8 < 0, & \text{máximo} \\ f''(\sqrt{2}) > 0, & \text{mínimo} \\ f''(-\sqrt{2}) > 0, & \text{mínimo.} \end{cases}$$

Los puntos donde se alcanza un mínimo relativo son los correspondientes a las abcisas $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$.

Ejercicio resuelto 2. Hallar los intervalos de monotonía, extremos y asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-2}$.

Solución. La función no está definida en $x = 2$. Este punto hay que tenerlo en cuenta para los intervalos de monotonía y asíntotas verticales.

1. Hallamos la primera derivada e igualamos a cero:

   $$f'(x) = \frac{(2x-4)(x-2) - 1\cdot(x^2-4x+3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+5}{(x-2)^2} \to x^2-4x+5 = 0 \Rightarrow notiene.$$

   Por tanto, sólo hay dos intervalos de monotonía determinados por el punto $x = 2$. Además, no tiene extremos relativos.

2. *a*) Ya que

   $$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-2} = \frac{-1}{0} = \infty,$$

   la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
signo f'	$+$	$+$
función	creciente	creciente

b) Para las asíntotas horizontales,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = \infty,$$

luego no tiene.

c) Si $y = mx + n$ es una asíntota oblicua (por uno de los lados), entonces

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x} = 1,$$

en ambos lados. Para n, tenemos,

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - m \cdot x = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x + 3}{x - 2} = -2.$$

Por la asíntota oblicua, en ambos lados, es $y = x - 2$.