Tema 2- Curso 1^0-B, Ciencias Ambientales
Asignatura: Matemáticas
Fecha: 19 de noviembre de 2020
Actualización: 19/11/2020, hora: 21:12:57

Ejercicio resuelto 1 (versión 1)**.**

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

SOLUCIÓN**.** Esta integral suena a $\sqrt{1-x^2}$ donde se hacía $x=\sin t$ para simplificar la raíz cuadrada. La diferencia ahora es que hay un signo $+$. Otra fórmula trigonométrica que nos simplifica es $1+\tan^2 x = 1/\cos^2 x$, luego hacemos $x=\tan t$. Obsérvese que este tipo se sustituciones no son del tipo $t=\ldots$ sino $x=\ldots$. Ahora $dx=(1+\tan^2 t)\,dt$, luego

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{1}{\cos^3 t}\,dt.$$

Hacemos $u=\sin t$: $du=\cos t\,dt$:

$$= \int \frac{1}{\cos^3 t}\frac{du}{\cos t} = \int \frac{1}{\cos^4 t}du = \int \frac{1}{(1-u^2)^2}\,du.$$

Esta integral es de una función racional, que ya sabemos cómo se resuelve, pues $(1-u^2)^2=(1-u)^2(1+u)^2$, luego

$$\frac{1}{(1-u^2)^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{(1-u)^2} + \frac{C}{1+u} + \frac{D}{(1+u)^2}.$$

$$1 = A(1-u)(1+u)^2 + B(1+u)^2 + C(1+u)(1-u)^2 + D(1-u)^2$$

Dando valores

$$u=1 \rightsquigarrow 1=4B \Rightarrow B=\frac{1}{4}$$

$$u=-1 \rightsquigarrow 1=4D \Rightarrow D=\frac{1}{4}$$

$$u=0 \rightsquigarrow 1=A+B+C+D \Rightarrow \frac{1}{2}=A+C$$

$$u=2 \rightsquigarrow 1=-9A+9B+3C+D \Rightarrow -\frac{6}{4}=-9A+3C$$

Por tanto, $A = C = \frac{1}{4}$. Entonces la integral es

$$= \frac{1}{4}\left(-\ln(1-\sin t) + \frac{1}{1-\sin t} + \ln(1+\sin t) - \frac{1}{1+\sin t}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\ln(1-\sin\arctan x) + \frac{1}{1-\sin\arctan x} + \ln(1+\sin\arctan x) - \frac{1}{1+\sin\arctan x}\right)$$

□

Ejercicio resuelto 2. *Hallar*

$$\int \sqrt{2-x-x^2}\, dx.$$

SOLUCIÓN**.** Hacemos cuadrados perfectos dentro de la raíz:

$$2-x-x^2 = -(\frac{1}{2}+x)^2 + 2 + \frac{1}{4} = -(\frac{1}{2}+x)^2 + \frac{9}{4}.$$

Entonces

$$\int \sqrt{2-x-x^2}\, dx = \int \sqrt{\frac{9}{4} - (\frac{1}{2}+x)^2}\, dx.$$

Para simplificar un poco, hacemos $t = 1/2 + x$, luego $dt = dx$,

$$= \int \sqrt{\frac{9}{4} - t^2}\, dt.$$

Dividimos por $9/4$ dentro de la raíz y multiplicamos por $2/3$ fuera:

$$= \frac{2}{3}\int \sqrt{1 - \frac{t^2}{9/4}}\, dt = \frac{2}{3}\int \sqrt{1 - (\frac{t}{3/2}}\, dt.$$

De nuevo hacemos $u = t/(3/2)$, $(3/2)du = dt$:

$$= \frac{2}{3}\frac{3}{2}\int \sqrt{1-u^2}\, du = \int \sqrt{1-u^2}\, du = \frac{1}{2}\left(\arcsin(u) + \frac{1}{2}\sin(2\arcsin(u))\right) + c,$$

donde la última integral ya se hizo en teoría. Por tanto la integral es

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin(\frac{2}{3}(\frac{1}{2}+x)) + \frac{1}{2}\sin(2\arcsin(\frac{2}{3}(\frac{1}{2}+x)))\right) + c$$

□