

Tema 2- Curso 1⁰-B, Ciencias Ambientales
Asignatura: Matemáticas
Fecha: 18 de noviembre de 2020
Actualización: 18/11/2020, hora: 21:32:17

Ejercicio resuelto 1.

$$\int \sin^3 x \cos^4 x dx.$$

SOLUCIÓN. Si hacemos $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$, tendríamos

$$\begin{aligned} &= - \int \sin^3 x t^4 \frac{dt}{\sin x} = - \int (1-t^2)t^4 dt = \int t^3(1-t^2) dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + c \\ &= -\frac{\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + c \end{aligned}$$

□

En la siguiente integral, recordamos identidades trigonométricas

Ejercicio resuelto 2. Hallar

$$\int \sin x \cos 2x dx.$$

SOLUCIÓN. Escribimos $\cos 2x$ en función de x , $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, luego

$$= \int \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int \sin x \cos^2 x - \sin^3 x dx$$

y hacemos cada integral por separado. Para la primera $t = \cos x$ y lo mismo para la segunda: $dt = -\sin x dx$.

$$\int \sin x \cos^2 x dx = - \int \sin x t^2 \frac{dt}{\sin x} = -\frac{t^3}{3} = -\frac{\cos^3 x}{3} + c.$$

$$- \int \sin^3 x dx = \int \sin^3 x \frac{dt}{\sin x} = \int \sin^2 x dt = \int (1-t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} + c = \cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + c.$$

□

Ejercicio resuelto 3. Hallar

$$\int \sin x \cos 3x dx.$$

SOLUCIÓN. Tenemos que poner $\cos 3x$ en función de x . Usamos las fórmulas

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

En este caso,

$$\cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x \cdot 2 \sin x \cos x,$$

luego la integral es

$$\begin{aligned} &= \int \sin x (\cos^3 x - \sin^2 x \cos x) - 2 \sin^2 x \cos x = \int (\sin x \cos^3 x - \sin^3 x \cos x + 2 \sin^3 x \cos x) dx \\ &= \int (\sin x \cos^3 x + \sin^3 x \cos x) dx. \end{aligned}$$

Se puede hacer ambas integrales mediante $t = \cos x$. También, y tenemos suerte, se puede simplificar:

$$\sin x \cos^3 x + \sin^3 x \cos x = \sin x \cos x (\cos^2 x + \sin^2 x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

En cualquier caso, queda,

$$-\frac{1}{4} \cos(2x) + c.$$

□

Ejercicio resuelto 4. Hallar

$$\int \sqrt{1 - \cos x} dx.$$

SOLUCIÓN. Lo hacemos con $t = \tan(x/2)$,

$$= \int \sqrt{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = 2\sqrt{2} \int \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} dt.$$

Como la derivada del paréntesis es $2t$, que aparece arriba, hacemos

$$u = 1 + t^2 \rightsquigarrow du = 2t dt.$$

$$= 2\sqrt{2} \int \frac{t}{u^{3/2}} \frac{du}{2t} = \sqrt{2} \int u^{-3/2} du = \sqrt{2} \frac{u^{-1/2}}{-1/2} + c = -2\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x/2)}} + c.$$

□