

Tema 2- Curso 1⁰-B, Ciencias Ambientales
 Asignatura: Matemáticas
 Fecha: 16 de noviembre de 2020
 Actualización: 16/11/2020, hora: 11:49:05

Hacemos varias integrales de funciones trigonométricas.

Ejercicio resuelto 1. *Hallar*

$$\int \frac{1}{\cos x - \sin x} dx.$$

SOLUCIÓN. ya que es una función racional de funciones trigonométricas, y los grados son pequeños (1), hacemos el cambio de tangente de $x/2$:

$$t = \tan \frac{x}{2},$$

donde sabemos

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Entonces

$$\int \frac{1}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{1}{-t^2 - 2t + 1} dt.$$

Queda ahora una función racional, que ya sabemos hacerlos. Hallamos las raíces del polinomio y vemos que son $-1 \pm \sqrt{2}$, luego

$$\frac{1}{t^2 + 2t - 1} = \frac{A}{t + 1 + \sqrt{2}} + \frac{B}{t + 1 - \sqrt{2}} = \frac{A(1 - \sqrt{2}) + B(1 + \sqrt{2})}{t^2 + 2t - 1}.$$

Igualando numeradores:

$$A(t + 1 - \sqrt{2}) + B(t + 1 + \sqrt{2}) = 1.$$

$$t = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow B = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$t = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow A = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

La integral es ahora

$$= -2 \left(\frac{-1}{2\sqrt{2}} \int \frac{A}{t + 1 + \sqrt{2}} dt + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{1}{t + 1 - \sqrt{2}} dt \right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\tan \frac{x}{2} + 1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\tan(\frac{x}{2} + 1 - \sqrt{2}) + c.$$

□

Ejercicio resuelto 2. *Hallar*

$$\int \frac{\tan x}{1 + \sin x} dx$$

SOLUCIÓN. Hacemos de nuevo $t = \tan x/2$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{\frac{2t}{1-t^2}}{\frac{2t+1+t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{4t}{(1-t^2)(t^2+2t+1)} dt. \\ &= \int \frac{4t}{(1-t)(1+t)(t+1)^2} dt. \end{aligned}$$

$$\frac{4t}{(1-t)(1+t)(t+1)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2} + \frac{D}{(t+1)^3}.$$

$$A(t+1)^3 + B(1-t)(t+1)^2 + C(1-t)(t+1) + D(1-t) = 4t.$$

Damos valores

$$t = -1 \Rightarrow -4 = 2D \Rightarrow D = -2.$$

$$t = 1 \Rightarrow 4 = 8A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$t = 0 \Rightarrow A + B + C + D = 0 \Rightarrow B + C = \frac{3}{2}.$$

$$t = -2 \Rightarrow -8 = -A + 3B - 3C + 3D \Rightarrow B = \frac{1}{2}, C = 1.$$

Por tanto, la integral es

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{2} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} - 2 \frac{1}{(t+1)^3} dt \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1 - \tan \frac{x}{2}) + \frac{1}{2} \ln(1 + \tan \frac{x}{2}) - \frac{1}{1 + \tan \frac{x}{2}} + \frac{1}{(1 + \tan \frac{x}{2})^2} + c. \end{aligned}$$

□

Ejercicio resuelto 3. *Hallar*

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x + 2 \cos x \sin^2 x} dx.$$

SOLUCIÓN. Como es impar en seno o en cosenos, tenemos dos posibilidades.

$$t = \cos x \rightsquigarrow dx = -\frac{1}{\sin x} dt.$$

La integral es

$$-\frac{1}{t^3 + 2t(1-t^2)} dt = \int \frac{1}{t(t^2-2)} dt.$$

Es una integral racional:

$$\frac{1}{t(t^2-2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-\sqrt{2}} + \frac{C}{t+\sqrt{2}}.$$

$$A(t^2-2) + Bt(t+\sqrt{2}) + Ct(t-\sqrt{2}).$$

$$A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{4}, C = \frac{1}{4}.$$

La integral es

$$-\frac{1}{2} \ln(\cos x) + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{2} + \cos x) + \frac{1}{4} \ln(-\sqrt{2} + \cos x) + c$$

□