Tema 2- Curso 1^0-B, Ciencias Ambientales
Asignatura: Matemáticas
Fecha: 12 de noviembre de 2020
Actualización: 12/11/2020, hora: 13:03:33

Consideramos ahora funciones racionales donde el denominador tiene raíces múltiples. Damos diferentes versiones de la misma idea.

Ejercicio resuelto 1 (versión 1)**.**

$$\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx.$$

SOLUCIÓN**.** Calculamos las raíces del denominador. Como es de segundo grado, esto es fácil, obteniendo $x=1$ que es doble. Luego

$$\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx.$$

Esta integral es inmediata con el cambio $t=x-1$ ($dt=dx$):

$$\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}+c = -\frac{1}{x+1}+c.$$

$\square$

Ejercicio resuelto 2 (versión 2)**.** *Hallar*

$$\int \frac{x^3}{-x^3+2x^2+4x-8}\,dx.$$

SOLUCIÓN**.** Como el grado del polinomio del numerador es el mismo que el del denominador, dividimos primero:

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3\big) \div \big(-x^3+2x^2+4x-8\big) = -1+\dfrac{2x^2+4x-8}{-x^3+2x^2+4x-8} \\
\underline{\;-x^3+2x^2+4x-8\;} \\
\qquad\quad 2x^2+4x-8
\end{array}$$

Por tanto,

$$\int \frac{x^3}{-x^3+2x^2+4x-8}\,dx = \int \left(-1+\frac{2x^2+4x-8}{-x^3+2x^2+4x-8}\right)dx = -x+2\int \frac{x^2+2x-4}{-x^3+2x^2+4x-8}\,dx.$$

Hacemos la integral. Para ello hallamos las raíces de $-x^3+2x^2+4x-8$. Como es de grado 3, usamos la regla de Ruffini. Si saliera una raíz, entonces nos quedaría luego un polinomio de segundo grado, donde tenemos una fórmula para hallar las raíces. Las raíces son $x=-2$ y $x=2$, en este caso es doble.

Obsérvese que el coeficiente líder del polinomio es -1. Dicho de otra manera, una cosa es factorizar y otra es hallar las raíces. Para factorizar, hay que hallar las raíces. Pero en este caso, hay que multiplicar por -1 para factorizar.

Por tanto,
$$-x^3+2x^2+4x-8=-(x+2)(x-2)^2.$$
El signo $-$ lo sacamos ahora de la integral:
$$\int \frac{x^2+2x-4}{-x^3+2x^2+4x-8}\,dx=-\int \frac{x^2+2x-4}{x^3-2x^2-4x+8}\,dx$$
Hacemos la integral. Para ello, ponemos primero
$$\frac{x^2+2x-4}{x^3-2x^2-4x+8}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)^2+B(x+2)(x-2)+C(x+2)}{x^3-2x^2-4x+8}.$$
Como los denominadores son iguales, también los numeradores:
$$x^2+2x-4=A(x-2)^2+B(x+2)(x-2)+C(x+2).$$
Hallamos A, B y C dando valores. Ya sabemos de teoría que $x=2$ y $x=-2$ no resuelve las tres incógnitas, y hay que dar un tercer valor:
$$x=-2\Rightarrow -4=16A\Rightarrow A=-\frac{1}{4}$$
$$x=2\Rightarrow 4=4C\Rightarrow C=1$$
$$x=0\Rightarrow -4=4A-4B+2C\Rightarrow B=\frac{5}{4}$$

Por tanto, la integral que quedaba es igual a
$$=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+2}\,dx+\frac{5}{4}\int\frac{1}{x-2}\,dx+\int\frac{1}{(x-2)^2}\,dx=-\frac{1}{4}\ln(x+2)+\frac{5}{4}\ln(x-2)-\frac{1}{x-2}+c.$$
La integral que nos pedía es
$$-x+\frac{1}{2}\ln(x+2)-\frac{5}{2}\ln(x-2)+\frac{2}{x-2}+c.$$
□