

Tema 3- Curso 1<sup>0</sup>-B, Ciencias Ambientales  
 Asignatura: Matemáticas  
 Fecha: 11 de diciembre de 2020  
 Actualización: 14/12/2020, hora: 17:12:24

Resolvemos sistemas de ecuaciones lineales basándonos en las matrices del día anterior.

**Ejercicio resuelto 1.** *Discutir según el parámetro  $a$  si el siguiente sistema tiene solución, clasificar y resolver en su caso:*

$$\begin{cases} ax - y + 3z = 1 \\ ax + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

SOLUCIÓN. La matriz de coeficientes y la matriz ampliada es

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 3 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A|b = \begin{pmatrix} a & -1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallamos el rango de  $A$ . Pero esto ya se hizo ayer, viéndose que era 3. Como el de la ampliada es como mucho 3, por tanto, el sistema es compatible y determinado porque coincide con el número de incógnitas. Resolvemos por Cramer. Para la primera incógnita, cambiamos la primera columna de  $A$  por la del término independiente:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{8} = 0.$$

Del mismo modo se hace para las otras dos:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}.$$

**Ejercicio resuelto 2.** *Según el parámetro  $a$ , discutir y resolver el siguiente sistema*

$$\begin{cases} ax - y = 1 \\ ax + y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN. La matriz de coeficientes y la ampliada es es

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ a & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A|b = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ya se vio que el rango de  $A$  es siempre 2 indistintamente del valor de  $a$ . Ahora hallamos el rango de la matriz ampliada. La matriz ampliada es de orden 3, luego sólo hay que hallar el determinante de dicha matriz.

♣ **Atención.** La “suerte” es que la matriz ampliada es de orden 3. Si no, habría que ir añadiendo filas y columnas al menor de orden 2 no nulo que daba el rango de  $A$ . Pero si se vuelve al ejercicio eso dependía si  $a = 2$  o no. Luego en cada caso, el añadir filas y columnas cambia porque cambia con el menor y habría discusión de casos *aunque el rango de  $A$  es indiferente del valor de  $a$ .*

Tenemos

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

Por tanto, el rango de la ampliada es 3 y el sistema es incompatible.

**Ejercicio resuelto 3.** Según el parámetro  $a$ , discutir y resolver en su caso el sistema

$$\begin{cases} ax - y + 3z = 1 \\ ax + ay + z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN. La matriz de coeficientes y la ampliada es

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 3 \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad A|b = \begin{pmatrix} a & -1 & 3 & 1 \\ a & a & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ya se vio que el rango de  $A$  era 2. Como la ampliada es  $2 \times 4$ , también es 2: sistema compatible indeterminado con soluciones con 1 parámetro (1 = número de incógnitas menos el rango de  $A$ ).

Se toma como ecuaciones las ecuaciones donde está el menor; se toma como incógnitas las que están en el menor y se toma como parámetros las incógnitas que no está en el menor.

Sin embargo, el menor fue cambiando según el valor de  $a$  (ésta es la situación indicada en rojo en el ejercicio anterior). Por tanto, distinguimos casos. Hay que recordar qué menores determinaba el rango de  $A$ .

1. Caso  $a \neq 0$ . El menor era

$$\begin{vmatrix} a & 3 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -2a.$$

Se toma las dos ecuaciones, las incógnitas son  $x$  y  $z$  y el parámetro  $y = \lambda$ . Se pasa  $y$  al término independiente y el sistema que nos queda es:

$$\begin{cases} ax + 3z = 1 + \lambda \\ ax + z = -a\lambda \end{cases}$$

Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 + \lambda & 3 \\ -a\lambda & 1 \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{\lambda + 3a\lambda + 1}{-2a}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 + \lambda \\ a & -a\lambda \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{-a^2\lambda - a\lambda - a}{-2a}.$$

La solución es

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda + 3a\lambda + 1}{-2a} \\ z = \frac{-a^2\lambda - a\lambda - a}{-2a} \\ y = \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. Caso  $a = 0$ . Lo mejor es sustituir  $a$  por su valor, pero teniendo en cuenta qué pasaba con el rango de  $A$ . El sistema es ahora:

$$\begin{cases} -y + 3z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Aunque ahora el sistema se podría estudiar “empezando desde el principio”, vamos a continuar para que sea vea qué hay de diferencia. La matriz ampliada y de coeficientes son ahora:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A|b \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que el menor que habíamos cogido anteriormente (filas 1-2, columnas 1-3) no se puede usar. El menor es: filas 1-2, columnas 2-3, que era justamente el que se usó en el día anterior (el valor era  $-1 - 3a = -1 \neq 0$ ). Por tanto: cogemos las dos filas como ecuaciones, como incógnitas  $y$  y  $z$  y como parámetro  $x$ , quedando el sistema, con  $x = \lambda$ :

$$\begin{cases} -y + 3z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Obsérvese que uno pueda pensar que no está  $x$ , lo cual no es cierto, sólo que está multiplicado por 0, sería concretamente

$$\begin{cases} -y + 3z = 1 - 0\lambda \\ z = 0 - 0\lambda \end{cases}$$

Da igual, seguimos con el método y resolvemos por Cramer:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = -1, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = 0$$

y la solución del sistema es

$$\begin{cases} x = \lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Hacemos el ejercicio anterior por el método de Gauss.

**Ejercicio resuelto 4.** Según el parámetro  $a$ , discutir y resolver en su caso el sistema

$$\begin{cases} ax - y + 3z = 1 \\ ax + ay + z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN. Hay que hallar el rango de la matriz de los coeficientes y el de la ampliada por Gauss, y resolvemos también por Gauss<sup>1</sup>. Lo que hacemos es coger la ampliada y hacer transformaciones elementales.

$$A|b = \left( \begin{array}{cccc|c} a & -1 & 3 & 1 & 1 \\ a & a & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{21}(-1)} \left( \begin{array}{cccc|c} a & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

Vemos el número de pivotes. Pero es claro que si  $a = 0$  no podemos seguir. Por tanto, distinguimos dos casos.

1. Caso  $a \neq 0$ . Entonces la matriz  $A$  tiene dos pivotes, a saber,  $a$  y, o  $a + 1$ , o si éste es 0, el siguiente es  $-2$ . En cualquier caso, hay dos, luego el rango es 2. Y como la matriz ampliada tiene como mucho rango 2, es que es 2: sistema compatible indeterminado.
2. Caso  $a = 0$ . Entonces  $a$  no es pivote. En este caso, es decir, cuando  $a$  tiene un valor “concreto”, lo mejor es sustituir:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

La matriz no está escalonada, y tenemos que continuar:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{21}(1)} \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Está escalonada, con dos pivotes. Decimos lo de antes y sistema compatible indeterminado.

---

<sup>1</sup>En general, uno puede combinar tanto métodos como Gauss para discutir y resolver.

Resolución del sistema. Por el método de Gauss hay que tomar las ecuaciones que nos quedan (en general hay filas que son todas ceros), es decir, las dos ecuaciones, las incógnitas son las de los pivotes y los parámetros las incógnitas que no están en los pivotes que se pasan al término independiente. Es claro que tenemos que distinguir casos.

1. Caso  $a \neq 0$ . Habíamos llegado a

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 3 & 1 \\ 0 & a+1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

En su momento con la discusión del número de pivotes parecía que habría que distinguir  $a+1=0$  pero ya se vio que no, porque el  $-2$  nos daba el otro. Lo que hacemos es: intercambiar las columnas 2 y 3, es decir, hacemos una transformación  $C_{23}$ :

♣ **Importante!** Las transformaciones por columnas se pueden realizar para hallar rangos, pero NO para resolver el sistema. En este caso, las transformaciones  $C_{ij}$  SÍ están permitidas porque lo único que se hace es reordenar las incógnitas.

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 3 & 1 \\ 0 & a+1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{23}} \begin{pmatrix} a & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & a+1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se toma como parámetro la tercera incógnita que es  $y$  (porque se reordenó):

$$\begin{cases} ax + 3z = 1 + \lambda \\ -2z = -1 - (a+1)\lambda \end{cases}$$

Resolvemos desde abajo y siguiendo hacia arriba: ¡éste es el truco del método de Gauss!:

$$z = \frac{1 + (a+1)\lambda}{2} \Rightarrow x = \frac{1 + \lambda - 3 \frac{1+(a+1)\lambda}{2}}{a},$$

obteniendo:

$$\begin{cases} x = \frac{-1 - (1+3a)\lambda}{2a} \\ y = \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \frac{1 + (a+1)\lambda}{2} \end{cases}$$

2. Caso  $a = 0$ . Al final teníamos ya la matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los pivotes se corresponden con  $y$  y  $z$ , luego se toma  $x = \lambda$  como parámetro y se pasa a la derecha, quedando el sistema

$$\begin{cases} -y + 3z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Resolvemos de abajo hacia arriba, obteniendo  $z = 0$  e  $y = -1$ , luego la solución es

$$\begin{cases} x = \lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

♣ Nota final. Hay que comparar los dos métodos. Probablemente, por menores es más sistemático y “más sencillo” si se hacen las cosas ordenadas. Hay que estudiar qué menores son o no 0. Por Gauss, el problema aparece cuando el lugar de los pivotes está ocupado por un parámetro que si es 0 ya no es pivote, y hay que cambiar las transformaciones elementales.