

Tema 3- Curso 1⁰-B, Ciencias Ambientales
Asignatura: Matemáticas
Fecha: 10 de diciembre de 2020
Actualización: 10/12/2020, hora: 07:51:27

Seguimos hallando rango de matrices con parámetros usando menores. Hacemos variaciones para una misma matriz.

Ejercicio resuelto 1. Según el parámetro a , hallar el rango, usando la matriz escalonada (o por filas, o por columnas), de

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 3 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN. Lo mejor es evitar los parámetros al principio. Empezamos por el menor de derecha-abajo: $|-1| = -1 \neq 0$, luego $r(A) \geq 1$. Añadimos la segunda fila y segunda columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

luego $r(A) \geq 2$. Añadimos la primera fila (la queda) y la primera columna (la que queda), luego

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 3 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

Por tanto, $r(A) \geq 3$, luego es 3.

♣ A la vista del resultado, es claro que si hubiéramos hallado en primer lugar el determinante de A nos hubiera dado distinto de 0, luego habríamos acabado el ejercicio inmediatamente. El problema hubiera sido que fuera 0.

Ejercicio resuelto 2. Según el parámetro a , hallar el rango, usando la matriz escalonada (o por filas, o por columnas), de

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ a & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN. Empezamos por el menor de derecha-abajo: $|1| = 1 \neq 0$, luego $r(A) \geq 1$. Obsérvese que el rango es como mucho 2. Añadimos la segunda fila y segunda columna:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a - 2.$$

Hacemos $a - 2 = 0$, es decir, $a = 2$ y distinguimos casos¹

1. Caso $a \neq 2$. Entonces el menor es distinto de 0, luego el rango es 2.
2. Caso $a = 2$. Sustituimos para ver las cosas claras. La matriz es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, vemos el menor de antes de orden 2 que es cero. Añadimos ahora la primera fila (la que faltaba) y la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

luego el rango es 2 de nuevo.

Por tanto, para cualquier valor de a el rango es 2.

Otra manera de hacerlo. Una vez cogido el menor de orden 1, hallamos *todos* los menores de orden 2 que resultan de añadir filas y columnas:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a - 2, \quad \begin{vmatrix} a & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a + 2.$$

Si alguno es distinto de 0, el rango es 2; si todos son 0, el rango es 1. Por tanto estudiamos cuando *todos los menores de orden 2 se anulan*, es decir, cuando $a + 2 = 0$ y $a - 2 = 0$. O lo que es lo mismo, a debería satisfacer $a = -2$ y $a = 2$, cosa que no es posible. Concluyendo que el rango es 2.

Ejercicio resuelto 3. Según el parámetro a , hallar el rango, usando la matriz escalonada (o por filas, o por columnas), de

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 3 \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN. Para variar, empezamos por el menor $|3| = 3 \neq 0$, luego $r(A) \geq 1$. Añadimos filas (sólo la segunda) y columnas (la primera y la segunda). Los dos menores de orden 2 son:

$$\begin{vmatrix} a & 3 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -2a, \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -1 - 3a.$$

El primero se anula para $a = 0$, el segundo para $a = -1/3$. Por tanto no hay un valor de a que anule a los dos menores, luego al menos uno no es cero. Esto concluye que el rango es 2.

¹Ya que se está haciendo de manera “ordenada”, no cogemos otro menor porque ha sido ahora donde ha aparecido una disyuntiva.