

Tema 2- Curso 1⁰-B, Ciencias Ambientales
Asignatura: Matemáticas
Fecha: 9 de noviembre de 2020
Actualización: 09/11/2020, hora: 12:49:39

Seguimos haciendo integrales por partes.

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Ejercicio resuelto 1 (versión 1). *Hallar*

$$\int x \arcsin x \, dx.$$

SOLUCIÓN. Esta integral ya ha salido pero sin estar multiplicada por x . Hacemos $u = \arcsin x$ para que al derivar desaparezca esta dificultad.

$$\begin{aligned} u = \arcsin x &\rightsquigarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = x \, dx &\rightsquigarrow v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}. \\ u \cdot v &= \frac{x^2}{2} \arcsin x. \end{aligned}$$

Entonces

$$\int \arcsin x \, dx = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

La integral ahora no es inmediata porque el numerador no es la derivada del radicando, ni tampoco es de tipo arco seno. Podemos intentar $t = 1 - x^2$, quedando debajo la raíz de t , y pudiendo despejar x^2 en función de t . El problema es que aparece una x .

$$t = 1 - x^2 \rightsquigarrow dt = -2x \, dx \rightsquigarrow dx = -\frac{dt}{2x}.$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int \frac{x^2}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{x}{\sqrt{t}} dt.$$

En vez de $t = 1 - x^2$, hacemos $t^2 = 1 - x^2$ para que se vaya la raíz:

$$t^2 = 1 - x^2 \rightsquigarrow 2t \, dt = -2x \, dx \rightsquigarrow dx = -\frac{t \, dt}{x}.$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int \frac{x^2 t}{t x} dt = - \int x dt = - \int \sqrt{1-t^2} dt.$$

Ésta última integral ya ha salido y se hace por una sustitución del tipo $t = \sin v$. La solución era:

$$\frac{1}{2} \left(-t\sqrt{1-t^2} - \arcsin(t) \right).$$

Volvemos a poner x :

$$= \frac{1}{2} \left(-\sqrt{1-x^2}x - \arcsin(\sqrt{1-x^2}) \right),$$

luego la integral final es

$$= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(-\sqrt{1-x^2}x - \arcsin(\sqrt{1-x^2}) \right) \right) + c.$$

□

Ejercicio resuelto 2. *Hallar*

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx.$$

SOLUCIÓN. Esta integral vamos a hacerla por partes, con la elección

$$\begin{aligned} u &= x e^x \rightsquigarrow du = (e^x + x e^x) dx = (x+1) e^x dx \\ dv &= \frac{1}{(x+1)^2} dx \rightsquigarrow v = \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{1+x}, \\ u \cdot v &= -\frac{1}{1+x} x e^x \end{aligned}$$

La integral $\int dv$ es inmediata con la sustitución $t = x + 1$ y ya ha aparecido varias veces. Entonces

$$\frac{x e^x}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{1+x} x e^x + \int \frac{1}{1+x} (x+1) e^x dx = -\frac{1}{1+x} x e^x + e^x + c.$$

□

Ejercicio resuelto 3 (versión 1). *Hallar*

$$\int x e^{2x} dx.$$

SOLUCIÓN. Esta integral es parecida a $\int xe^x dx$, que ya se ha calculado. Ahora, en el exponente aparece $2x$, que es múltiplo de x . Luego haciendo una sustitución previa $t = 2x$, la convertimos en la anterior: $dt = 2 dx$:

$$\int xe^{2x} dx = \int \frac{t}{2} e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{4} \int te^t dt.$$

Como

$$\int te^t dt = e^t(t-1),$$

entonces

$$= \frac{1}{4}(t-1)e^t + c = \frac{1}{4}(2x-1)e^{2x} + c = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + c.$$

Ejercicio resuelto 4 (versión 2). *Hallar*

$$\int xe^{x^2} dx.$$

SOLUCIÓN. Esta integral es inmediata porque la derivada del exponente es $2x$ que es justo lo que hay fuera:

$$t = x^2 \rightsquigarrow dt = 2x dx \rightsquigarrow dx = \frac{dt}{2x}.$$

$$\int xe^{x^2} dx = \int xe^t \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}e^t + c \frac{1}{2}e^{x^2} + x.$$

□