Tema 1- Curso 1^0-B, Ciencias Ambientales
Asignatura: Matemáticas
Fecha: 8 de octubre de 2020
Actualización: 08/10/2020, hora: 17:41:04

Ejercicio resuelto 1. Hallar

$$\lim_{x\to+\infty} x\log x, \ \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x}, \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x}$$

Solución. 1. Sustituyendo, $\lim_{x\to+\infty} x\log x = +\infty$.

2. Sustituyendo, es de tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

3. El siguiente límite se puede hacer usando el otro, ya que es el inverso, luego el límite es 0; o aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital porque es una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Ejercicio resuelto 2. Hallar

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x, \ \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\log x}, \ \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x}$$

Solución. 1. Sustituyendo, queda $0\cdot(-\infty)$, que es una indeterminación. Se pasa a una del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ para aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

2. Sustituyendo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\log x} = \frac{0^+}{-\infty} = 0.$$

3. El es inverso del anterior, luego el límite es $-\infty$, o sustituyendo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$$

Ejercicio resuelto 3. Hallar los intervalos de monotonía, extremos relativos, intervalos de convexidad, los puntos de inflexión y asíntotas de la función $f(x) = (x+3)e^{-x}$.

Solución. La función se puede ver (y conveniente) como un cociente de funciones: $f(x)\frac{x+3}{e^x}$.

1. Hallamos la primera derivada. Como es un cociente,

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - e^x(x+3)}{(e^x)^2} = \frac{-x-2}{e^x}.$$

   Igualamos a cero, es decir, el numerador, luego $x = -2$. Los intervalos de crecimientos son $(-\infty, -2)$ y $(-2, \infty)$. Damos valores, por ejemplo $x = -3$, que sale positivo, y $x = 0$, que es negativo. Por tanto,

   a) En $(-\infty, -2)$, es creciente.
   b) En $(-2, \infty)$, es decreciente.

2. Por tanto, $x = -$ es un mínimo relativo.

3. Hallamos la derivada segunda, para hallar los puntos de inflexión e intervalos de convexidad.

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot e^x - e^x(-x-2)}{(e^x)^2} = \frac{x+1}{e^x}.$$

   Igualamos a cero, $x+1 = 0$, luego $x = -1$ es el punto de inflexión.

4. Los intervalos de convexidad son $(-\infty, -1)$ y $(-1, \infty)$. Dando valores,

   a) En $(-\infty, -1)$, es negativo, luego cóncava.
   b) En $(-1, \infty)$, es positivo, luego convexo.

   a) Asíntota vertical no tiene porque el dominio de la función es todo $\mathbb{R}$.
   b) Para la asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to\pm\infty} (x+3)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}.$$

   Usamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} (x+3)e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{e^x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$$

   Luego la asíntota horizontal por la derecha es $y = 0$ y por la izquierda no tiene.

c) Al tener asíntota horizontal por la derecha, no tiene oblicua. Por la izquierda:

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{x+3}{xe^x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x+3}{x}}{e^x} = \frac{1}{0} = \infty$$

luego no tiene.