Tema 1- Curso 1^0-B, Ciencias Ambientales
Asignatura: Matemáticas
Fecha: 7 de octubre de 2020
Actualización: 24/11/2020, hora: 16:36:59

Ejercicio resuelto 1. Calcular los intervalos de monotonía y extremos relativos de $f(x) = x^3/4 - 3x^2 + 9x$.

Solución. Para los intervalos de monotonía hallamos la primera derivada y vemos dónde es positiva y negativa. En primer lugar, observemos que la función es continua en toda la recta real. Tenemos

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9.$$

Hallamos los ceros de dicha función:

$$\frac{3}{4}x^2 - 6x + 9 = 0 \to 3x^2 - 24x + 36 = 0 \to x = 2, x = 6.$$

Los intervalos de monotonía son $(-\infty, 2)$, $(2, 6)$ y $(6, \infty)$. Damos valores en puntos intermedios:

$$f'(0) = 9 > 0, \quad f'(4) = -3 < 0, \quad f'(7) > 0.$$

Para los intervalos de los extremos, podemos hallar el límite,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9 = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9 = +\infty,$$

luego en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(6, \infty)$, la derivada es positiva. Conclusión:

1. En $(-\infty, 2)$, la función es creciente.
2. En $(2, 6)$, la función es decreciente.
3. En $(6, \infty)$, la función es creciente.

Deducimos también que $x = 2$ es un máximo relativo, y $x = 6$ es un mínimo relativo.

Ejercicio resuelto 2. Determinar los intervalos de monotonía y los extremos relativos de

$$f(x) = \frac{2x^2}{x - 1}.$$

Solución. Obsérvese que la función no está definida (y es discontinua) en $x = 1$. Este punto hay que tenerlo en cuenta para estudiar los intervalos de crecimiento.

Hallamos la derivada,

$$f'(x) = \frac{4x \cdot (x - 1) - 1 \cot 2x^2}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x - 1)^2}.$$

De $f'(x) = 0$, $2x^2 - 4x = 0$, tenemos $x = 0$ y $x = 2$. Por tanto los intervalos de monotonía son $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, \infty)$.

Importante: en este caso el valor $x = 1$ no influye, pues el denominador de $f'(x)$, que es donde aparece, es $(x-1) = 2$, que siempre es positivo. Por tanto, sólo hay que mirar el signo del denominador, lo cual se obtiene dando valores. También se puede usar que es una parábola, luego cerca de $-\infty$ y $+\infty$, es positivo.

Así,

1. En $(-\infty, 0)$, para $x = -1$, es 16, luego es positivo.
2. En $(0, 2)$, para $x = ,5$, es negativo.
3. En $(2, \infty)$, para $x = 3$, es positivo.

Por tanto,

1. En $(-\infty, 0)$, la función es creciente.
2. En $(0, 2)$, la función es decreciente.
3. En $(2, \infty)$, la función es creciente.

Por tanto, $x = 0$ es un máximo relativo y $x = 2$ es un mínimo relativo.

Ejercicio resuelto 3. Hallar las asíntotas de la función anterior.

Solución.

1. Verticales. Es la recta $x = 1$, pues
$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2}{x-1} = \infty.$$
2. Horizontales. No tiene, pues
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x-1} = \infty.$$
3. Oblícuas. Es la recta $y = mx + n$, donde
$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2 - x} = 2.$$
$$n = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x-1} - 2x = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x-1} = 2.$$
Luego la asíntota es $y = 2x + 2$.