

Tema 2- Curso 1<sup>0</sup>-B, Ciencias Ambientales  
Asignatura: Matemáticas  
Fecha: 6 de noviembre de 2020  
Actualización: 06/11/2020, hora: 09:38:59

Seguimos haciendo integrales por partes.

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

♣ ¡Importante! El número de integrales que se pueden hacer por partes es 'pequeño', luego con los que se dio en teoría junto con los de estos días, casi se ha completado todas ellas.

**Ejercicio resuelto 1** (versión 1). *Hallar*

$$\int \arcsin x \, dx.$$

SOLUCIÓN. Hacemos  $u = \arcsin x$  para que al derivar desaparezca esta dificultad.

$$\begin{aligned} u = \arcsin x &\rightsquigarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx &\rightsquigarrow v = \int dx = x. \\ u \cdot v &= x \arcsin x. \end{aligned}$$

Entonces

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

La integral es casi inmediata pue es la derivada del radicando es  $-2x$  que aparece en el numerador.

$$t = 1 - x^2 \rightsquigarrow dt = -2x \, dx \rightsquigarrow dx = -\frac{1}{2} \frac{dt}{x}.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{x}{\sqrt{t}} \frac{dt}{x} = -\frac{1}{2} \frac{t^{1/2}}{1/2} = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2} + c.$$

Por tanto, la integral es

$$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

□

**Ejercicio resuelto 2.** *Hallar*

$$\int x^2 \sin x \, dx.$$

SOLUCIÓN. A la vista de la integral  $\int x \sin x \, dx$  hecha en teoría, hacemos la siguiente elección

$$u = x^2 \rightsquigarrow du = 2x \, dx$$

$$dv = \sin x \cdot dx \rightsquigarrow v = \int \sin x \, dx = -\cos x.$$

$$u \cdot v = -x^2 \cos x.$$

Entonces

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx.$$

La segunda integral se hace, claramente, por partes de nuevo:

$$u = x \rightsquigarrow du = dx$$

$$dv = \cos x \cdot dx \rightsquigarrow v = \int \cos x \, dx = \sin x.$$

$$u \cdot v = x \sin x.$$

Luego

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + c$$

y la integral que nos pedían es

$$-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c.$$

□

Está claro que uno puede seguir con integrales del tipo

$$\int x^n \sin x \, dx, \quad \left[ \int x^n \cos x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}. \right.$$

Al contrario con las integrales de ayer, ‘pasar’  $x^n$  al denominador cambia radicalmente la situación. Nos estamos refiriendo a la integral

$$\int \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

Al hacer  $dv = 1/x \, dx$ , nos queda  $v = \log x$  que impide finalizar la integración. Concretamente para esta integral, *no hay una expresión de la misma en términos de funciones elementales.*

**Ejercicio resuelto 3.** *Hallar*

$$\int \cos(2x)e^x dx.$$

SOLUCIÓN. Esta integral está casi hecha por teoría (ejemplo 1.21) y es del tipo de reiterar dos veces la integral. La ‘diferencia’ ahora es que aparece  $2x$  en el coseno. O se hace previamente  $t = 2x$ , eliminando el 2, o arrastramos hasta el final. Hacemos esto último:

$$u = e^x \rightsquigarrow du = e^x dx$$

$$dv = \cos 2x \cdot dx \rightsquigarrow v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$u \cdot v = \frac{1}{2} \sin(2x)e^x.$$

Entonces

$$\int \cos(2x)e^x dx = \frac{1}{2} \sin(2x)e^x - \frac{1}{2} \int \sin 2x e^x dx.$$

La segunda integral se hace por partes *haciendo las mismas elecciones: en caso contrario no podríamos acabar.*

$$u = e^x \rightsquigarrow du = e^x dx$$

$$dv = \sin 2x \cdot dx \rightsquigarrow v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x.$$

$$u \cdot v = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x.$$

Entonces

$$\int e^x \cdot \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^x \cdot \cos 2x dx.$$

Colocamos esto en la integral inicial:

$$\int \cos(2x)e^x dx = \frac{1}{2} \sin(2x)e^x - \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^x \cdot \cos 2x dx. \right).$$

Es decir,

$$\int \cos(2x)e^x dx = \frac{1}{2} \sin(2x)e^x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x - \frac{1}{4} \int e^x \cdot \cos 2x dx.$$

luego

$$\frac{5}{4} \int \cos(2x)e^x dx = \frac{1}{2} \sin(2x)e^x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x + c.$$

Finalmente,

$$\int \cos(2x)e^x dx = \frac{2}{5} \sin(2x)e^x + \frac{1}{5} e^x \cos 2x + c.$$

Recuérdese que también se puede hacer la elección cambiada *desde el principio*:

$$u = \cos 2x$$

$$dv = \cos e^x \cdot dx.$$

□