Tema 1- Curso 1^0-B, Ciencias Ambientales
Asignatura: Matemáticas
Fecha: 6 de octubre de 2020
Actualización: 06/10/2020, hora: 07:15:20

Ejercicio resuelto 1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{\log(x)}{x^2}$.
2. $g(x) = (1-x^3)\cos x$.
3. $h(x) = -5x + \frac{1}{e^x}$.

Solución.

1. Tenemos un cociente de funciones:
$$f'(x) = \frac{(\log x)' x^2 - (x^2)' \log x}{(x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (2x) \cdot \log x}{x^4}$$
$$= \frac{x - 2x \log x}{x^4} = \frac{1 - 2\log x}{x^3}.$$
2. Tenemos un producto de funciontes:
$$g'(x) = -3x^2 \cos x + (1-x^3) \cdot (-\sin x) = -3x^2 \cos x - (1-x^3) \sin x.$$
3. Tenemos una suma de funciones. Por otro lado, la función $1/e^x$ la escribimos como e^{-x}. Por tanto,
$$h'(x) = -5 - e^{-x}.$$

Ejercicio resuelto 2.

Determinar los valores de a y b para que la siguiente función sea derivable:
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 3, & x \leq 1 \\ 2bx - 4, & x > 1. \end{cases}$$

Solución. Para que sea derivable, primero debe ser continua. Y sólo hay que verlo en el punto $x = 1$. Como el comportamiento de la función a ambos lados de dicho punto es diferente, hallamos límites laterales, obteniendo:
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = a + b - 3, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2b - 4.$$
Por tanto, hace falta que $a + b - 3 = 2b - 4$, luego $a - b = -1$.

Para ver ahora si es derivable, hacemos el mismo tipo de razonamiento pero para la derivada de la función. De nuevo, como la función es a trozos, la derivada es a trozos, luego
$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b, & x \leq 1 \\ 2b, & x > 1. \end{cases}$$

Calculamos los límites laterales,

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2a+b, \quad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2b.$$

Luego coinciden si $2a+b=2b$, es decir, $2a=b$.

Resumiendo, la función será continua en $x=1$ si $a-b=-1$, y será derivable en $x=1$ si $2a-b=0$. Resolviendo

$$\left\{ \begin{array}{l} a-b=-1 \\ 2a-b=0 \end{array} \right.$$

tenemos que la solución es $a=1$, $b=2$.