Tema 2- Curso 1^0-B, Ciencias Ambientales
Asignatura: Matemáticas
Fecha: 5 de noviembre de 2020
Actualización: 05/11/2020, hora: 07:07:15

Recordamos las integrales por partes.

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du.$$

El método a seguir sería:

1. Identificar que la integral es por partes: ésta es la parte más difícil. Sin embargo, y como se verá con los ejercicios, la cantidad de integrales por partes es muy pequeña y perfectamente distinguible. En general, la elección de la función u se corresponde con la parte 'difícil' del integrando, de manera que al derivar, esa 'dificultad' se 'disipa'.
2. En el integrando, hay que separar la función u y la función dv (= $v'(x)\,dx$). Esta parte no es tan difícil porque en general tendremos dos posibilidades, luego es una o es la otra.
3. Hay que hallar v, es decir, hay que hacer la integral $v = \int v'(x)\,dx$.
4. Hay que hallar du, que no es más que $u'(x)\,dx$.
5. Hay que hallar la integral $\int v\cdot u'\,dx$.

Ejercicio resuelto 1 (versión 1)**.** *Hallar*

$$\int x\log x\,dx.$$

SOLUCIÓN**.** Uno puede pensar que es una integral por sustitución porque la derivada del logaritmo es $1/x$ que parece que es lo que ha fuera:

$$t = \log x \rightsquigarrow dt = \frac{1}{x}\,dx \rightsquigarrow dx = x\,dt.$$

$$\int x\log x\,dx = \int x^2 t\;dt$$

y claramente se ve que no es posible seguir.

Es una integral por partes porque el logaritmos es "difícil" de integrar de por sí. Si hacemos $u = \ln x$, entonces du quita esa "dificultad' quedado un polinomio. Por otro lado, llamando $dv = x\, dx$, es fácil de integrar.

Obsérvese que si hubiéramos cambiado de elección, $dv = \log(x)\, dx$, la integral es por partes (hecha en teoría) y se podría acabar todo el ejercicio

$$\begin{aligned}
&u = \ln x \rightsquigarrow du = \frac{1}{x}\, dx\\
&dv = x \cdot\ dx \rightsquigarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2}.\\
&u \cdot v = \frac{x^2}{2} \ln x.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\int x \log x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^2}{2}\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2}\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c.$$

□

Ejercicio resuelto 2 (versión 2)**.** *Hallar*

$$\int x^2 \log x\, dx.$$

SOLUCIÓN**.** A la vista de lo anterior, hacemos la siguiente elección

$$\begin{aligned}
&u = \ln x \rightsquigarrow du = \frac{1}{x}\, dx\\
&dv = x^2 \cdot\ dx \rightsquigarrow v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}.\\
&u \cdot v = \frac{x^3}{3} \ln x.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\int x \log x\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^3}{3}\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c.$$

□

Está claro que uno puede sacar una fórmula general para la integral del tipo

$$\int x^n \log x\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Probamos ahora poniendo la potencia en el denominador:

Ejercicio resuelto 3 (versión 3). *Hallar*

$$\int \frac{1}{x} \ln x \, dx.$$

SOLUCIÓN.

$$\begin{aligned}
&u = \ln x \rightsquigarrow du = \frac{1}{x}\, dx \\
&dv = \frac{1}{x} \cdot \, dx \rightsquigarrow v = \int \frac{1}{x} dx = \ln x. \\
&u \cdot v = \ln^2 x.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\int \frac{1}{x} \log x \, dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\, dx.$$

Vuelve a salir la integral inicial, luego pasamos a la izquierda:

$$2 \int \frac{1}{x} \log x \, dx = \ln^2 x,$$

concluyendo

$$\int \frac{1}{x} \log x \, dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c.$$

Nota. Si uno recuerda el intento de sustitución inicial, cambiaba los polinomios en el denominador y numerador de manera anómala. Como ahora aparece en el integrando x en el denominador, lo intentamos por el método de cambio de variable:

$$t = \log x \rightsquigarrow dt = \frac{1}{x}\, dx \rightsquigarrow dx = x\, dt.$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int \frac{1}{\cancel{x}} \cancel{x} t \, dt = \int t \, dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c.$$

Luego sí se podría resolver por sustitución. Esto nos confirma de nuevo que *pequeñas variaciones en el integrando hacen que el método para resolver la integral cambie drásticamente*. □

A la vista de la última observación, incrementamos el grado de x en el denominador.

Ejercicio resuelto 4 (versión 4). *Hallar*

$$\int \frac{1}{x^2} \ln x \, dx.$$

SOLUCIÓN. Intentamos por sustitución.

$$t = \log x \rightsquigarrow dt = \frac{1}{x}\,dx \rightsquigarrow dx = x\,dt.$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2} x t\,dt = \int \frac{1}{x} t\,dt.$$

Luego la integral no sale directamente.

♣ ¡Importante! Cuando se han hecho las integrales por sustitución hay que poner todas las funciones en la variable de la diferencial. Tanto en este ejercicio, como en el primero esto no se ha hecho y se dijo que "no se podía seguir". Sin embargo, hay que poner todo en la misma variable y ahí concluir si se puede o no seguir.

Por ejemplo, en esta integral, si seguimos y como $x = e^t$,

$$\int \frac{1}{x} t\,dt = \int t e^t\,dt.$$

Esta integral es por partes (hecha en teoría), luego se podría haber acabado con la integral.

Observación: en la primera integral tendríamos

$$\int x^2 t\,dt = \int e^{2t} t\,dt$$

que también se puede acabar! porque es por partes (hecha en teoría). En este caso sería mejor hacer antes un cambio de variable tipo $s = 2t$.

Hasta aquí, y cuando la integral el polinomio estaba en el denominador, hemos hecho la integral por el método de sustitución. Pero podríamos haberlo intentando por partes, siguiendo la idea de que $u = \ln x$ quita la dificultad de la integral. Lo intentamos.

$$u = \ln x \rightsquigarrow du = \frac{1}{x}\,dx$$
$$dv = \frac{1}{x^2} \cdot dx \rightsquigarrow v = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}.$$
$$u \cdot v = -\frac{1}{x} \ln x.$$

Entonces

$$\int \frac{1}{x^2} \log x\,dx = -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x}\frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c.$$

Luego sí se podría resolver por partes. De nuevo, es claro que se puede sacar una fórmula general para la integral

$$\int x^n \ln x\,dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(El caso $n = 0$ se hizo en teoría por partes). □