

Tema 2- Curso 1⁰-B, Ciencias Ambientales
 Asignatura: Matemáticas
 Fecha: 4 de noviembre de 2020
 Actualización: 04/11/2020, hora: 07:14:34

Ejercicio resuelto 1. *Hallar las siguientes integrales:*

$$1. \int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx.$$

$$2. \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx.$$

$$3. \int \frac{1 + \sin x}{\cos x} dx.$$

SOLUCIÓN. 1. Elevamos al cuadrado y desarrollamos, quedando integrales inmediatas

$$= \frac{1}{4} \int (e^{2x} + e^{-2x} + 2) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + 2x \right) + c.$$

2. Ya que aparecen el seno y el coseno y uno es la derivada del otro (salvo signo), se puede hacer una sustitución por el seno o por el coseno. En primer lugar, intentamos

$$t = \sin x \rightsquigarrow dt = \cos x dx \rightsquigarrow dx = \frac{1}{\cos x} dt.$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx = \int \frac{t}{\sqrt{\cos x}} \frac{1}{\cos x} dt$$

Intentamos con la segunda posibilidad:

$$t = \cos x \rightsquigarrow dt = -\sin x dx \rightsquigarrow dx = -\frac{1}{\sin x} dt.$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx = - \int \frac{\sin x}{\sqrt{t}} \frac{1}{\sin x} dt = - \int t^{-1/2} dt = -\frac{t^{1/2}}{1/2} + c = -2\sqrt{\cos x} + c.$$

3. Como antes, tenemos dos posibilidades:

$$t = \sin x \rightsquigarrow dt = \cos x dx \rightsquigarrow dx = \frac{1}{\cos x} dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sin x}{\cos x} dx &= \int \frac{1+t}{\cos x} \frac{1}{\cos x} dt = \int \frac{1+t}{1-t^2} dt = \int \frac{1+t}{(1-t)(1+t)} dt \\ &= \int \frac{\cancel{1+t}}{(1-t)(\cancel{1+t})} dt = -\log(1-t) + c = -\log(1 - \sin x) + c. \end{aligned}$$

□

Ejercicio resuelto 2. Hallar:

1. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}} dx.$

2. $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}} dx.$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx.$

SOLUCIÓN. 1. Ya que la derivada de lo de dentro de la raíz es x salvo constante,

$$t = 4x^2 - 1 \rightsquigarrow dt = 8x dx \rightsquigarrow dx = \frac{1}{8x} dt.$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}} dx = \int \frac{1}{x\sqrt{t}} \frac{1}{8x} dt = \frac{1}{8} \int \frac{1}{x^2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{8} \int \frac{1}{x^2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{8} \int \frac{4}{(t+1)\sqrt{t}} dt$$

Ya que el denominador se ha complicado, volvemos a hacer la integral pero ahora con $t^2 = 4x^2 - 1$, porque así desaparece la raíz:

$$t^2 = 4x^2 - 1 \rightsquigarrow 2t dt = 8x dx \rightsquigarrow dx = \frac{t}{4x} dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}} dx &= \int \frac{1}{x\sqrt{t^2}} \frac{t}{4x} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{4}{1+t^2} dt \\ &= \arctan(t) + c = \arctan(\sqrt{4x^2-1}) + c. \end{aligned}$$

2. Completamos cuadrados dentro de la raíz:

$$6x - x^2 = -(3-x)^2 + 9.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{9-(3-x)^2}} dx$$

Esta integral se parece al arco seno. Dividimos numerador y denominador por 3:

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-(3-x)^2}} dx = \int \frac{1/3}{\sqrt{1-(\frac{3-x}{3})^2}} dx.$$

$$t = 3-x \rightsquigarrow dt = -dx.$$

$$= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{1}{3} \arcsin(t) + c = -\frac{1}{3} \arcsin(3-x) + c.$$

3. Completamos cuadrados dentro de la raíz:

$$2x - x^2 = -(1-x)^2 + 1.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} dx$$

$$t = 1-x \rightsquigarrow dt = -dx.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} dx = - \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\arcsin(1-x) + c.$$