

Tema 3- Curso 1⁰-B, Ciencias Ambientales

Asignatura: Matemáticas

Fecha: 3 de diciembre de 2020

Actualización: 04/12/2020, hora: 18:16:36

Hoy calculamos determinantes. Estos determinantes los vamos a hacer todos desarrollando por filas o columnas, según convenga, y haciendo, si es necesario transformaciones elementales, que recordamos ahora:

1. F_{ij} es la matriz que resulta de la matriz identidad I al intercambiar la fila i por la j . El determinante cambia de signo
2. $F_i(\lambda)$ es la matriz que resulta de I cuando multiplicamos la fila i por el escalar λ . El determinante se multiplica por λ .
3. $F_{ij}(\lambda)$ es la matriz que resulta de I cuando se suma a la i -fila la fila j multiplicada por λ . El determinante no cambia.

En los de orden 3 nunca vamos a usar la regla de Sarrus.

Ejercicio resuelto 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN. 1. Como hay un cero en la tercera fila, desarrollamos por ella:

$$= -1 \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 41 + 8 = 49.$$

2. Hacemos ceros en la primera columna debajo del pivote $(1,1)$ con operaciones $F_{ij}(\lambda)$, luego el determinante no cambia:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_{21}(-1), F_{31}(1)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por la primera columna, obteniendo

$$= 1 \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 49.$$

Ejercicio resuelto 2. *Hallar*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

SOLUCIÓN. Al ser un determinante de orden 4 sin “ceros” es largo. Luego hacemos ceros por el método de Gauss. Hacemos ceros debajo del pivote del lugar (1, 1).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_{21}(-2), F_{31}(-3) \\ F_{41}(-4)}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{vmatrix} = 0,$$

porque la cuarta fila es la suma de la segunda y tercera.

Ejercicio resuelto 3. *Hallar*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN. De nuevo vamos a hacer transformaciones elementales. En vez de hacer ceros en la primera columna, por cambiar, vamos a hacerlos en la cuarta, donde hay un 1 en el lugar (2, 4), que lo usaremos como “pivote”. Haremos transformaciones de tipo $F_{i2}(\lambda)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_{12}(-4), F_{32}(-5) \\ F_{42}(-2)}} \begin{vmatrix} -15 & -10 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -18 & -12 & -6 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos por la cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} -15 & -10 & -5 \\ -18 & -12 & -6 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2(-6) \\ F_1(-5)}} \begin{vmatrix} -15 & -10 & -5 \\ -18 & -12 & -6 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 30 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

porque hay dos filas iguales

Ejercicio resuelto 4. *Hallar x para que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & x & 2 & 1 \\ 2 & 3 & x & x \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

SOLUCIÓN. En vez de desarrollar desde el principio por alguna fila o columna, hacemos primeros ceros en la primera columna:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & x & 2 & 1 \\ 2 & 3 & x & x \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} F_{21}(-4), F_{31}(-2) \\ \\ F_{41}(-5) \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & x-8 & -10 & -15 \\ 0 & -1 & x-6 & x-8 \\ 0 & -6 & -12 & -18 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} x-8 & -10 & -15 \\ -1 & x-6 & x-8 \\ -6 & -12 & -18 \end{array} \right| \\ & \stackrel{F_{32}(-6)}{=} \left| \begin{array}{ccc} x-8 & -10 & -15 \\ -1 & x-6 & x-8 \\ 0 & 24-6x & 30-6x \end{array} \right| = -(24-6x) \left| \begin{array}{cc} x-8 & -15 \\ -1 & x-8 \end{array} \right| + (30-6x) \left| \begin{array}{cc} x-8 & -10 \\ -1 & x-6 \end{array} \right| = \\ & = (24-6x)((x-8)^2 - 15) - (30-6x)((x-8)(x-6) - 10) = \\ & (24-6x)(x^2 - 16x + 55) - (30-6x)(x^2 - 14x + 38) = 6x^2 - 30x + 36. \end{aligned}$$

Por tanto

$$6x^2 - 30x + 36 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 3.$$