

Tema 1- Curso 1⁰-B, Ciencias Ambientales
 Asignatura: Matemáticas
 Fecha: 1 de octubre de 2020
 Actualización: 01/10/2020, hora: 16:57:38

Ejercicio resuelto 1. Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2 - \sqrt{x-2}}{x^2 - 36}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3x^2} \right)^{\frac{5x}{2x-3}}.$$

Solución. Para el primer límite, como el numerador y denominador son funciones continuas, habría que sustituir. Sin embargo

$$\lim_{x \rightarrow 6} (2 - \sqrt{x-2}) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 6} (x^2 - 36) = 0$$

simplemente sustituyendo. Ya que nos sale 0/0, entonces tenemos una indeterminación¹. En general, las indeterminaciones de tipo 0/0 se resuelve simplificando la expresión (o aplicando, con derivadas, la regla de L'Hôpital. En este caso, estamos en la primera situación. Multiplicamos y dividimos la expresión por $2 + \sqrt{x-2}$:

$$\begin{aligned} \frac{2 - \sqrt{x-2}}{x^2 - 36} \cdot \frac{2 + \sqrt{x-2}}{2 + \sqrt{x-2}} &= \frac{4 - (\sqrt{x-2})^2}{(x^2 - 36)(2 + \sqrt{x-2})} = \frac{6 - x}{x^2 - 36} \\ &= \frac{6 - x}{(x-6)(x+6)(2 + \sqrt{x-2})} = -\frac{1}{(x+6)(2 + \sqrt{x-2})}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2 - \sqrt{x-2}}{x^2 - 36} = \lim_{x \rightarrow 6} -\frac{1}{(x+6)(2 + \sqrt{x-2})} = \frac{1}{48}.$$

Para el segundo límite, sustituimos de nuevo, usando la regla $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$. Tenemos pues

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{\infty} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{2x-3} = \frac{5}{2},$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3x^2} \right)^{\frac{5x}{2x-3}} 0^{5/2} = 0.$$

¹Diferente sería si fuera

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2 + \sqrt{x-2}}{x^2 - 36}$$

donde al sustituir nos sale 4/0, luego es infinito, y el signo de dicho infinito depende del signo del denominador, porque el numerador siempre es positivo. Como $x^2 - 36$ toma valores positivos y negativos a ambos lados de $x = 6$, concluimos

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{2 + \sqrt{x-2}}{x^2 - 36} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{2 + \sqrt{x-2}}{x^2 - 36} = +\infty.$$

El siguiente ejercicio es un límite del tipo del número e .

Ejercicio resuelto 2. Hallar

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x-4} \right)^{2x+3}.$$

Solución. Todo son funciones continuas, luego sustituimos, obteniendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x-4} \right)^{2x+3} = 1^\infty,$$

luego ya sabemos que es una indeterminación². Usamos la regla³ de resolución de este tipo de indeterminaciones, obteniendo en primer lugar,

$$g(x)(f(x) - 1) = (2x+3) \left(\frac{x-1}{x-4} - 1 \right) = (2x+3) \frac{3}{x-4} = \frac{3(2x+3)}{x-4}$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3(2x+3)}{x-4} = 6$$

y consecuentemente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x-4} \right)^{2x+3} = e^6.$$

²Diferente hubiera sido

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{2x-4} \right)^{2x+3} = \left(\frac{1}{2} \right)^\infty = 0,$$

o

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x-4} \right)^{\frac{1}{2x+3}} = 1^0 = 1.$$

3

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x)-1)}.$$