

Relación de ejercicios del tema 3

Espacios vectoriales euclídeos

Asignatura: Geometría II

Doble grado en ingeniería informática y matemáticas

Profesor: Rafael López Camino

1. Dado un espacio vectorial, probar que la suma de dos métricas euclídeas es otra métrica euclídea y que el producto de una métrica por un número positivo también es una métrica euclídea.
2. Estudiar si las siguientes métricas sobre \mathbb{R}^3 dadas por las expresiones matriciales respecto de la base usual, son euclídeas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+4 & -2 & 2 \\ -2 & a+1 & -1 \\ 2 & -1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

3. Utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz en un espacio vectorial euclídeo conveniente para probar las siguientes desigualdades y caracterizar cuándo se obtiene la igualdad en cada una de ellas:

(a) Para cualesquiera $x_1, \dots, x_n \geq 0$,

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right).$$

(b) Para cada matriz cuadrada de orden n , $(\text{tr}(A))^2 \leq n \text{tr}(A^2)$.

(c) Para cualquier función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene

$$\left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f(x)^2 dx.$$

4. En el espacio euclídeo \mathbb{R}^4 , hallar una base ortonormal de

$$U = \{(x, y, z, t) : 2x + 4y - z + 3t = 0\}.$$

Ampliar dicha base hasta conseguir una base ortonormal de \mathbb{R}^4 y hallar las coordenadas respecto de dicha base del vector $(1, 0, 0, 1)$.

5. Sea un espacio euclídeo de dimensión n y $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base tal que $|e_i| = 2$, $1 \leq i \leq n$ y $\angle(e_i, e_j) = \pi/3$ para $i \neq j$. Hallar $M_B(g)$ y una base ortonormal.
6. En $S_2(\mathbb{R})$ se considera la métrica euclídea $g(A, C) = \text{tr}(AC)$. Usar el método de Gram-Schmidt para hallar una base ortonormal a partir de la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

7. Hallar una base por Gram-Schmidt en los siguientes espacios euclídeos y bases:

- (a) En $U = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$, con esa base y con la métrica usual de las matrices
- (b) En $U = \langle \{\sin(x), \cos(x), \sin(2x)\} \rangle$, con esa base y con la métrica $g(f, g) = \int_0^\pi f(x)g(x) dx$.
- (c) En $\mathbb{R}_2[x]$, la base usual y la métrica $g(p, q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$.

8. En \mathbb{R}^3 se considera la métrica

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Probar que es euclídea.
- (b) Hallar el ángulo entre los vectores $(1, 1, 0)$ y $(0, -1, 1)$.
- (c) Hallar la proyección ortogonal y la simetría ortogonal del vector $(2, 1, 0)$ respecto del plano $U = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$.

9. En el espacio $M_2(\mathbb{R})$ con la métrica usual y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U = \langle C \rangle.$$

- (a) Hallar la proyección ortogonal de A sobre U y la simetría ortogonal respecto de U .
- (b) Hallar una base de U^\perp .
10. Se considera \mathbb{R}^4 con la métrica usual. Hallar la expresión de la proyección ortogonal y simetría ortogonal respecto de $U = \{(x, y, z, t) : x - t = 0\}$. Lo mismo, pero ahora $U = \langle (1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0) \rangle$.
11. En $\mathbb{R}_2[x]$ con la métrica $g(p, q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$, hallar la proyección ortogonal y simetría ortogonal respecto de la recta $U = \langle x + 2x^2 \rangle$
12. Probar que $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ dado por $f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z)$ es autoadjunto respecto de la métrica g :

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hallar una base ortonormal de (\mathbb{R}^3, g) .

13. El mismo que antes pero cambiando la métrica y f por

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

14. En $\mathbb{R}_2[x]$ se considera la métrica

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Hallar el ángulo entre los vectores $p(x) = 1 + x$ y $q(x) = 2x + x^2$.

- (b) Hallar la expresión analítica de la proyección ortogonal y la simetría ortogonal de la recta vectorial $U = \langle 1 + x \rangle$. item Hallar una base de Gram-Schmidt a partir de la base $\{1 + x, 1 + x + x^2, 5\}$.
15. En \mathbb{R}^2 se considera el endomorfismo $f(x, y) = (x + 3y, x + 3y)$. Probar que f es autoadjunto respecto de la métrica g dada por $M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$. Hallar una base ortonormal de vectores propios.
16. Se considera en \mathbb{R}^3 la métrica

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -7 & 17 & 5 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Probar que el endomorfismo $f(x, y, z) = (2x - 4y - 2z, x - 2y - z, -x + 2y + z)$ es autoadjunto y hallar los valores propios así como una base ortonormal de vectores propios.

17. Se considera el endomorfismo de \mathbb{R}^3 dado por $f(x, y, z) = (x + 3y, x + y + z, x - y + 2z)$. Hallar, si es posible, la expresión matricial de una métrica g de \mathbb{R}^3 respecto de la base usual de manera que f sea un endomorfismo autoadjunto respecto de dicha métrica.
18. En \mathbb{R}^3 con la métrica usual y respecto de la base $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ se define un endomorfismo mediante

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Estudiar si f es una isometría y clasificarla. Estudiar si f es autoadjunto y en tal caso, hallar una base ortonormal donde diagonaliza.

19. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

encontrar una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

20. Sea B una base de un espacio vectorial euclídeo de dimensión 2 tal que $M_B(g) = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$. Estudiar si los siguientes endomorfismos son isometrías y en caso afirmativo, clasificarlas:

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}, \quad M(h, B) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

21. Lo mismo que antes pero ahora en (\mathbb{R}^3, g_u) y

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z, -2x + y - 2z, 2x + 2y - z).$$

22. Describir las isometrías de (\mathbb{R}^2, g_u) y (\mathbb{R}^3, g_u) dadas respecto de la base usual:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

23. En $\mathbb{R}_2[x]$ con la métrica usual, se considera el endomorfismo

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \frac{1}{3}((2a_0 - a_1 + 2a_2) + (-a_0 + 2a_1 + 2a_2)x + (2a_0 + 2a_1 - a_2)x^2).$$

Probar que es una isometría y clasificarla.

24. Lo mismo pero en $V = (S_2(\mathbb{R}), g_u)$ y

$$f\left(\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b & \frac{a}{\sqrt{2}} \\ \frac{a}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2}c \end{pmatrix}.$$

25. En \mathbb{R}^2 con la métrica usual, y respecto de la base usual, hallar la matriz de la simetría axial respecto de $U = \langle (2, 3) \rangle$, y el giro que lleva el vector $(-4, 3)$ en el vector $(5, 0)$.

26. Lo mismo que el anterior, pero en \mathbb{R}^3 , y para las siguientes isometrías:

- (a) La rotación de ángulo $\pi/2$ con eje $U = \{(x, y, z) : x + y = 0, x - z = 0\}$.
- (b) La simetría ortogonal respecto de U^\perp .
- (c) Una isometría directa (rotación) que lleva $(1, -1, 0)$ en $(1, -1, 0)$ y $(1, 1, 5)$ en $(3, 3, -3)$.
- (d) La reflexión respecto del plano de ecuación $x - z = 0$.
- (e) El giro de ángulo $\pi/3$ respecto del eje $x + y = 0, y + z = 0$.
- (f) Clasificar la isometría resultante de la composición de las dos anteriores isometrías.
- (g) El giro de ángulo $\pi/4$ respecto de $U = \{(x, y, z) : x = y, z = 0\}$.
27. En \mathbb{R}^3 se considera la métrica g asociada a la forma cuadrática $\phi(x, y, z) = 5x^2 - 4xy - 4xz + 13y^2 + 6yz + 2z^2$. Estudiar si los siguientes endomorfismos son isometrías y clasificarlos:

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

28. Igual que el anterior, pero ahora $\phi(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + 2yz + 3z^2$ y

$$M(f, B_u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & -1 - \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & -1 + \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

29. En \mathbb{R}^2 con la métrica usual, se considera f el giro de ángulo $\pi/4$ y g la simetría ortogonal respecto de la recta $x - y = 0$. Clasificar $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$ y $g \circ f$.
30. En un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 y respecto de una base ortonormal $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, se define un endomorfismo f mediante

$$f(e_1 + e_2) = \frac{1}{3}((-e_1 - e_2 + 4e_3), \quad f(e_2) = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + 2e_3), \quad f(e_3) = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 + e_3).$$

Probar que f es una isometría y clasificarla, calculando los elementos geométricos que la define.

31. En un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 y respecto de una base ortonormal $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, se define un endomorfismo f mediante

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Probar que f es una isometría y clasificarla, calculando los elementos geométricos que la define.

32. En un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 y respecto de una base ortonormal $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, se definen dos endomorfismos f, g mediante

$$f(e_1 - \sqrt{3}e_3) = -2e_3, \quad f(e_2) = e_2, \quad f(\sqrt{3}e_1 + e_3) = 2e_1.$$

$$g(e_1) = e_1, \quad g(e_2) = -e_3, \quad g(e_3) = -e_2.$$

Probar que f y g son isometrías y clasificarla calculando los elementos geométricos que la define. Hacer lo mismo con $f \circ g$.

33. En \mathbb{R}^3 respecto de la métrica usual, se considera el endomorfismo dado por

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probar que f es una isometría y clasificarla, calculando los elementos geométricos que la define.

34. Se considera B una base en un espacio vectorial euclídeo V y una métrica euclídea g dada por

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Probar que

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

es una isometría. Clasificarla, calculando los elementos geométricos que la define.

35. Hallar la expresión matricial respecto de la base usual de \mathbb{R}^3 del giro de 120 grados respecto de la recta de ecuación $x - y = 0$, $x - z = 0$, y hallar los subespacios invariantes.
36. Lo mismo que el anterior, siendo ahora la simetría axial respecto de la recta anterior.
37. Lo mismo que el anterior, siendo ahora el giro de ángulo 60 grados respecto de la recta L dada por $x - y = 0$, $z = 0$, seguido de la reflexión respecto de L^\perp .
38. Hallar la expresión analítica de f en coordenadas respecto de la base usual de la reflexión respecto del plano $2x + y + z = 0$.
39. Hallar la expresión matricial respecto de la base $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ de la simetría central de \mathbb{R}^3 .
40. En \mathbb{R}^2 , se consideran $U = \langle u \rangle$ y $W = \langle w \rangle$. Probar que la composición de las reflexiones respecto de U y W es un giro y hallar el ángulo de giro.
41. Probar que en un espacio euclídeo de dimensión 3, la composición de dos reflexiones respecto de dos planos es un giro. Hallar el eje de giro y el ángulo.
42. Clasificar la isometría de \mathbb{R}^3 dada por

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

43. Clasificar calculando los elementos geométricos que la define, la isometría que es la composición de dos giros de 90 grados respecto de la recta $U = \langle (0, 0, 1) \rangle$ y luego respecto de $W = \langle (0, 1, 0) \rangle$.
44. Clasificar calculando los elementos geométricos que la define, la isometría que es la composición de dos giros de 60 grados respecto de la recta $U = \langle (1, 1, 0) \rangle$ y luego respecto de $W = \langle (0, 1, 1) \rangle$.
45. Estudiar si son verdaderas o las siguientes proposiciones:
- (a) Si g es una métrica euclídea, entonces todos los elementos diagonales de la matriz de g en cualquier base son positivos.

- (b) Si g es una métrica tal que todos los elementos diagonales de la matriz de g en cualquier base son positivos, entonces g es euclídea.
- (c) Si g es una métrica cuya matriz en una base B tiene un valor propio negativo, entonces g no es euclídea.
- (d) Sean u, v dos vectores no nulos en un espacio euclídeo. Si α es el ángulo entre u y v , entonces 2α es el ángulo entre $2u$ y $2v$.
- (e) Si U es un hiperplano de un espacio vectorial euclídeo, entonces hay exactamente dos vectores perpendiculares a U y unitarios.
- (f) Toda matriz cuadrada con determinante 1 o -1 es ortogonal.
- (g) Si dos subespacios de un espacio vectorial euclídeo son perpendiculares, uniendo dos bases ortonormales de cada uno de ellos obtenemos una base ortonormal de la suma de los dos subespacios.
- (h) Sea U un subespacio vectorial de un espacio euclídeo (V, g) . entonces $I_V = 2\pi_U - \sigma_U$.
- (i) Todo endomorfismo autoadjunto de un espacio euclídeo es automorfismo.
- (j) Todo endomorfismo diagonalizable de un espacio vectorial es autoadjunto respecto de alguna métrica euclídea en dicho espacio.
- (k) Dos vectores propios linealmente independientes de un endomorfismo autoadjunto son ortogonales.
- (l) Si f es una isometría de un espacio euclídeo, entonces dos vectores propios de f asociados a valores propios distintos son ortogonales.
- (m) Toda isometría de un espacio euclídeo es un endomorfismo autoadjunto.
- (n) En un espacio euclídeo (V, g) , dados dos subespacios de la misma dimensión, existe una isometría de (V, g) que lleva uno en otro.
- (o) En el espacio euclídeo \mathbb{R}^2 , consideramos el giro R_θ de ángulo $\theta \in (0, 2\pi)$ y la simetría ortogonal σ respecto de la recta de ecuación $y = 0$. Entonces $f = R_\theta \circ \sigma$ es la simetría ortogonal respecto de la recta $(\cos \theta - 1)x + \sin \theta y = 0$.
- (p) En un espacio euclídeo de dimensión 2, la composición de dos simetrías axiales es un giro.
- (q) Si una matriz ortogonal de orden 2 no es diagonal y tiene determinante positivo, entonces no es diagonalizable.
- (r) Toda isometría de un espacio euclídeo de dimensión 5 para la que el subespacio de vectores fijos tiene dimensión 2 es invertible.

- (s) En un espacio euclídeo de dimensión impar no existen isometrías f tales que $f \circ f = -I_V$.