Relación de ejercicios del tema 1
Diagonalización de endomorfismos

Asignatura: Geometría II
Doble grado en ingeniería informática y matemáticas
Profesor: Rafael López Camino

---

1. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V tal que $f \circ f = -1_V$. Demostrar que f no tiene valores propios.

2. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V y supongamos que existe $r \geq 0$ tal que $f \circ f = r1_V$. Probar que los únicos valores propios posibles son $\sqrt{r}$ y $-\sqrt{r}$.

3. Probar que toda matriz de orden 2 y determinante negativo es diagonalizable.

4. Probar que un endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con nulidad 1 y $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ es diagonalizable.

5. Estudiar si es diagonalizable el endomorfismo
$$f : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x], \quad f(p(x)) = xp'(x).$$

6. Hallar los valores propios y subespacios propios de las matrices, estudiando si son diagonalizables:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Estudiar si son semejantes las matrices A y B, y B y C.

7. Estudiar la diagonalización de
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. En el espacio vectorial de matrices simétricas $S_2(\mathbb{R})$, consideramos el endomorfismo f tal que

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

donde $B = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$. Hallar los valores y subespacios propios y estudiar si es diagonalizable.

9. Según el parámetro a, estudiar si es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -a & a \\ a+2 & -a & a-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

y en tal caso, hallar una matriz regular P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

10. Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Estudiar si es diagonalizable y en tal caso, hallar una matriz regular P tal que PAP^{-1} es diagonal.
   b) Hallar A^5 y A^{-4}.
   c) Estudiar si existe una matriz B tal que $B^2 = A$.

11. Estudiar para qué valores de a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a+4 & 1-a & -2a-a^2 \\ 0 & 4-a & 0 \\ 0 & 0 & 4-a^2 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. Para $a = 1$ y $a = 2$ hallar una base de vectores propios.

12. Según los parámetros a y b, estudiar la diagonalización de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a-b & 0 & 2a-2b \\ 1 & a & 2 \\ -a+b & 0 & -a+2b \end{pmatrix}.$$

En el caso que lo sea, hallar una matriz regular tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

13. Respecto de una base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de un espacio vectorial V, sabemos que un endomorfismo f satisface:

   a) $f(u) = u$, con $u = 6e_1 + 2e_2 + 5e_3$,

   b) el subespacio $U = \{v \in V : x + 6y - 3z = 0\}$ es propio, y

   c) la traza de f es 5.

   Hallar la matriz $M(f, B)$, los valores propios de f y si es diagonalizable.

14. Igual que el ejercicio anterior, pero ahora

   a) $f(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $f(e_2) = 2e_1 + 2e_2$,

   b) $M(f, B)$ es simétrica y

   c) $2e_1 - 2e_2 - e_3 \in \mathrm{Ker}(f)$

15. Estudiar si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

   a) Si λ es un valor propio de un endomorfismo, $f(V_\lambda) = V_\lambda$.

   b) La suma de vectores propios es un vector propio.

   c) Si A es diagonalizable, también lo es A^t.

   d) Toda matriz cuadrada de orden impar tiene valores propios.

   e) Toda matriz cuadrada de orden par tiene valores propios.

   f) Si un endomorfismo satisface que coincide la multiplicidad geométrica y aritmética de todos sus valores propios, entonces es diagonalizable.

   g) Si el polinomio característico de una matriz A de orden 2 es $(1-\lambda)^2$, entonces A es diagonalizable.

   h) Lo mismo que el anterior, pero ahora A es de orden 3 y $P_A(\lambda) = (1 - \lambda)^3$.

   i) Una matriz diagonalizable es regular si y sólo si $\lambda = 0$ no es valor propio.

   j) Si un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ tiene tres valores propios simples, existe una única base B tal que $M(f, B)$ es diagonal.

   k) Si A es diagonalizable, entonces $A + I$ es diagonalizable.

   l) Si A es diagonalizable y C es diagonal, entonces $a + C$ es diagonalizable. Lo mismo pero con el producto.

m) La suma de matrices diagonalizables es diagonalizable. Lo mismo pero con el producto.

n) Si $f \in \mathrm{End}(V)$ tal que $f \circ f = f$ y 0 no es valor propio de f, entonces $f = 1_V$.

ñ) Si $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ con $\mathrm{Im}(f) = \{(x, y, z) : x+y+z = 0\}$ y -2 y 57 son valores propios, entonces f es diagonalizable.

o) Si $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ con $\mathrm{Im}(f) = \{(x, y, z) : x + y = 0 = y + z = 0\}$ y -2 y 57 son valores propios, entonces f es diagonalizable.

p) Si $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ con $\mathrm{Im}(f) = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$, entonces f es diagonalizable.

q) Si $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ con $\mathrm{Im}(f) = \{(x, y, z) : x + y = 0 = y + z = 0\}$, entonces f es diagonalizable.

r) Sea $V = U \oplus W$, $f \in \mathrm{End}(V)$ y U un subespacio propio. Entonces W es un subespacio propio.

s) Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$, $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ y $dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$. Entonces f es diagonalizable.

t) Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$, $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ y $dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$. Entonces f es diagonalizable.

u) Si dos matrices diagonalizables tienen los mismos valores propios (con las mismas multiplicidades aritméticas), son semejantes.

v) Si dos matrices tienen los mismos valores propios (con las mismas multiplicidades aritméticas), son semejantes.

w) Si dos matrices semejantes son diagonalizables, tienen los mismos valores propios (con las mismas multiplicidades aritméticas).