TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría Diferencial. Curso 1995/96
Licenciatura: Matemáticas (Plan 1973)
Universidad de Granada

Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una curva cerrada y simple, parametrizada por el arco y sea $\{T(s), N(s)\}$ su diedro de Frenet en $s \in \mathbb{R}$. Un entorno tubular de α de radio $\rho > 0$ es

$$N_\rho(\alpha) = \{\alpha(s) + tN(s); s \in \mathbb{R}, |t| < \rho\}.$$

Se consideran los conjuntos

$$N_\rho^+(\alpha) = \{\alpha(s) + tN(s); s \in \mathbb{R}, 0 < t < \rho\}.$$

$$N_\rho(\alpha) = \{\alpha(s) + tN(s); s \in \mathbb{R}, -\rho < t < 0\}.$$

La *distancia orientada* en $N_\rho(\alpha)$ está dada por

$$D(\alpha(s) + tN(\alpha(s)) = t.$$

Lema 1 *Sea a un número real positivo. Entonces existe una función diferenciable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que$g(t) = 1$ si $t \geq a$, $g(t) = -1$ si $t \leq a$, g es creciente en $(-a, a)$ y g es impar.*

Proposición 1 *Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva cerrada simple y $N_\rho(\alpha)$ un entorno tubular de α. Existe una función diferenciable $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $F^{-1}(\{0\}) = \alpha(\mathbb{R})$ y $N_\rho^+(\alpha) \subset F^+$ y $N_\rho^-(\alpha) \subset F^-$, donde $F^+ = F^{-1}(0, \infty)$ y $F^- = F^{-1}(-\infty, 0)$. Además $\mathbb{R}^2 - \alpha(\mathbb{R})$ tiene al menos dos componentes conexas y toda componente conexa de $\mathbb{R}^2 - \alpha(\mathbb{R})$ está contenida en F^+ o en F^-.*

Demostración: Sea g la función del Lema 1 para el valor de $a = \rho/2$. Se define $f : N_\rho(\alpha) \to \mathbb{R}$ por $f = g \circ D$, donde D es la distancia orientada en $N_\rho(\alpha)$. La función f es diferenciable y $f^{-1}(\{0\}) = D^{-1}(g^{-1}(\{0\})) = D^{-1}(\{0\}) = \alpha(\mathbb{R})$. Además f es constantemente 1 ó -1 en las dos componentes conexas de $N_\rho(\alpha) - \overline{N_{\rho/2}(\alpha)}$. Por lo tanto, el campo $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$X(p) = \begin{cases} \nabla f(p) & \text{si } p \in N_\rho(\alpha) \\ 0 & \text{si } p \in \mathbb{R}^2 - \overline{N_{\rho/2}(\alpha)} \end{cases}$$

es diferenciable, ya que $\nabla f = 0$ en $N_\rho(\alpha) - \overline{N_{\rho/2}(\alpha)}$.

La aplicación dX_p es autoadjunta para cada $p \in \mathbb{R}^2$, ya que esta propiedad es local, y en cada uno de los dos abiertos donde está definido X, el campo dX_p es autoadjunto. Usando el Lema de Poincaré, existe una función $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla G = X$. Como el abierto $N_\rho(\alpha)$ es conexo y en dicho abierto el gradiente de G y el de f coincide, existe una constante c tal que $G = f + c$. Se define ahora $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante $F = G - c$. Esta aplicación es diferenciable y

$$\nabla F = X \qquad F_{|N_\rho(\alpha)} = f.$$

Como $X = \nabla F$ es nulo en $\mathbb{R}^2 - \overline{N_{\rho/2}(\alpha)}$, la función F es constante en cada componente conexa K de ese abierto.

Veamos ahora que cada componente conexa K de $\mathbb{R}^2 - \overline{N_{\rho/2}(\alpha)}$ interseca a $N_\rho(\alpha - \overline{N_{\rho/2}(\alpha)}$. Para ello, sea $x \in K$ con $x \not\in N_\rho(\alpha)$ y se considera $y \in \overline{N_{\rho/2}(\alpha)}$ el punto de $\overline{N_{\rho/2}(\alpha)}$ más cercano a x ($\overline{N_{\rho/2}(\alpha)}$ es un compacto). Entonces el segmento $[x, y)$ está contenido en $\mathbb{R}^2 - \overline{N_{\rho/2}(\alpha)}$, pues en caso contrario, habría puntos de $\overline{N_{\rho/2}(\alpha)}$ más cercanos a x que y. Como $[x, y)$ es conexo y $x \in K$, entonces $[x, y) \subset K$. Por tanto, $K \cap (\mathbb{R}^2 - \overline{N_{\rho/2}(\alpha)}) \neq \emptyset$.

Por lo tanto, al ser F constante en cada componente conexa K de $\mathbb{R}^2 - \overline{N_{\rho/2}(\alpha)}$ y al cortar todas esas componentes a $N_\rho(\alpha) - \overline{N_{\rho/2}(\alpha)}$, donde la función F coincide con f, que vale sólo 1 ó -1, tenemos que F es constantemente 1 ó -1 en cada K de ese tipo. Se ha conseguido así a función diferenciable F que coincide con f en $N_{\rho/2}(\alpha)$ y sólo toma los valores 1 ó -1 en $\mathbb{R}^2 - \overline{N_{\rho/2}(\alpha)}$. Como consecuencia,

$$F^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(\{0\} = \alpha(\mathbb{R}).$$

Por otro lado, $N_\rho(\alpha) - \alpha(\mathbb{R})$ tiene exactamente dos componentes conexas, que son justamente $N_\rho^+(\alpha)$ y $N_\rho^-(\alpha)$. Si $x \in N_\rho^+(\alpha)$, se tiene

$$F(x) = f(X) = g(D(x)) > 0.$$

Entonces $N_\rho^+(\alpha) \subset F^+$ y análogamente, $N_\rho^- \subset F^-$.

Finalmente, la función F tiene signo en cada componente conexa de $\mathbb{R}^2 - \alpha(\mathbb{R})$, ya que F sólamente se anula en puntos de $\alpha(\mathbb{R})$. Eligiendo sendos puntos de $N_\rho^+(\alpha)$

y $N_\rho^-(\alpha)$ y sus respectivas componentes arcoconexas, se concluye que estas componentes son distintas (la función F tiene signo diferente en ellas). Por tanto, existen al menos dos componentes conexas de $\mathbb{R}^2 - \alpha(\mathbb{R})$. *q.e.d*