DESIGUALDAD ISOPERIMÉTRICA

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría Diferencial. Curso 1995/96
Licenciatura: Matemáticas (Plan 1973)
Universidad de Granada

Lema 1 *Sea $f:[0,A]\rightarrow\mathbb{R}$ una aplicación perteneciente al espacio $C^2([0,A])$ tal que $f(0)=f(A)=0$. Entonces existe $h\in C^1([0,A])$ tal que*

$$f(t)=h(t)\sin(\frac{\pi t}{A}),\quad \forall t\in[0,A].$$

Demostración: Basta con definir $h:[0,A]\rightarrow\mathbb{R}$ mediante

$$h(t)=\begin{cases}\frac{f(t)}{\sin(\frac{\pi t}{A})} & t\in(0,A)\\ \frac{A}{\pi}f'(0) & t=0\\ -\frac{A}{\pi}f'(A) & t=A\end{cases}$$

q.e.d

Lema 2 (Desigualdad de Wirtinger) *Sea $f:[0,A]\rightarrow\mathbb{R}$, $f\in C^2([0,A])$ tal que $f(0)=f(A)=0$. Entonces*

$$\int_0^A f'(t)^2\,dt\geq\frac{\pi^2}{A^2}\int_0^A f(t)^2\,dt$$

y se da la igualdad si y sólo si $f(t)=a\sin(\frac{\pi t}{A})$, $t\in[0,A]$.

Demostración: Por el lema anterior sabemos que existe $h\in C^1([0,A])$ tal que $f(t)=h(t)\sin(\frac{\pi t}{A})$. Entonces

$$f(t)^2=h(t)^2\sin^2(\frac{\pi t}{A}).$$

$$f'(t)=h'(t)\sin(\frac{\pi t}{A})+\frac{\pi}{A}h(t)\cos(\frac{\pi t}{A}).$$

Entonces

$$f'(t)^2-\frac{\pi^2}{A^2}f(t)^2=h'(t)^2\sin^2(\frac{\pi t}{A})+\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{A}h(t)^2\sin(\frac{\pi t}{A})\cos(\frac{\pi t}{A})\right).$$

Integrando esta ecuación obtenemos

$$\int_0^A \left(f'(t)^2 - \frac{\pi^2}{A^2} f(t)^2 \right) dt = \int_0^A h'(t)^2 \sin^2(\frac{\pi t}{A}) dt \geq 0,$$

que es la desigualdad pedida.

Si se tiene igualdad, entonces

$$\int_0^A h'(t)^2 \sin{(\frac{\pi t}{A})}^2 \; dt = 0.$$

Por tanto, ya que el integrando es una función continua, es constantemente cero en $[0, A]$. Luego $h'(t) = 0$ en $(0, A)$, y por ser h una función C^1, $h'(t) = 0$, $\forall t \in [0, A]$. Entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(t) = a \sin{(\frac{\pi t}{A})}$ en $[0, A]$.

Para finalizar, si f es de esta forma, es trivial que se da igualdad. *q.e.d*

Lema 3 *Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva cerrada simple de longitud L. Entonces existen rectas perpendiculares R_1 y R_2, cada una de las cuales dividiendo a $\alpha(\mathbb{R})$ en dos curvas de igual longitud.*

Demostración: Sin perder generalidad, suponemos que α está parametrizada por el arco. Sean $p_1 = \alpha(0)$ y $p_2 = \alpha(L/2)$. Entonces la recta R_1 que une p_1 con p_2 es una de las rectas pedidas. Sea ahora $f : [0, L/2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(s) = \langle \alpha(s + \frac{L}{2}) - \alpha(s), e_1 \rangle$$

donde $e_1 = (p_2 - p_1)/|p_2 - p_1|$. La aplicación f es continua y verifica

$$f(0) = |p_2 - p_1| > 0$$

$$f(\frac{L}{2}) = -|p_2 - p_1| < 0$$

Entonces existe $s_0 \in (0, L/2)$ tal que

$$f(s_0) = \langle \alpha(s_0 + \frac{L}{2}) - \alpha(s_0), e_1 \rangle = 0. \qquad (*)$$

Sea $p_3 = \alpha(s_0)$ y $p_4 = \alpha(s_0 + \frac{L}{2})$ y la recta R_2 la que une dichos puntos. Esta recta es perpendicular a R_1 pues $\langle p_4 - p_3, e_1 \rangle = 0$ y la longitud del trozo de $\alpha(\mathbb{R})$ entre p_3 y p_4 es $(s_0 + L/2 - s_0) = L/2$. *q.e.d*

Teorema 1 (Desigualdad isoperimétrica) *Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva regular cerrada, simple, de longitud L. Sea Ω el dominio acotado por $\alpha(\mathbb{R})$. Entonces:*

1. $L^2 \geq 4\pi A(\Omega)$.
2. *Se tiene la igualdad si y sólo si $\alpha(\mathbb{R})$ es una circunferencia.*

Demostración: Suponemos que la curva α está parametrizada por el arco y positivamente orientada. Usando el lema anterior y siguiendo la misma notación, sea $e_2 = (p_4 - p_3)/|p_4 - p_3|$. Entonces $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal. Después de un movimiento rígido, podemos suponer que el origen de coordenadas del plano es el punto de intersección de las rectas R_1 y R_2 y que los vectores e_1 y e_2 son los vectores de la base usual de $\mathbb{R}^2$.

Del teorema de la divergencia

$$2A(\Omega) = -\int_0^L \langle \alpha(s), N(s) \rangle ds \leq \int_0^L |\alpha(s)| ds.$$

Usando la desigualdad de Schwarz,

$$\int_0^L |\alpha(s)| ds \leq L^{1/2} \left(\int_0^L |\alpha(s)|^2 \right)^{1/2}$$

Sustituyendo en la anterior ecuación y elevando al cuadrado

$$\frac{4\ A(\Omega)^2}{L} \leq \int_0^L |\alpha(s)|^2 ds.$$

Acotamos superiormente el miembro de la derecha.

$$\begin{aligned}
\int_0^L |\alpha(s)|^2 ds &= \int_0^L \langle\alpha(s),e_1\rangle^2 ds + \int_0^L \langle\alpha(s),e_2\rangle^2 ds \\
&= \int_0^{L/2} \langle\alpha(s),e_1\rangle^2 ds + \int_{L/2}^L \langle\alpha(s),e_1\rangle^2 ds \\
&+ \int_0^{L/2} \langle\alpha(s),e_2\rangle^2 ds + \int_{L/2}^L \langle\alpha(s),e_2\rangle^2 ds \\
&= (1)+(2)+(3)+(4)=(5).
\end{aligned}$$

Aplicamos la desigualdad de Wirtinger a cada una de las cuatro anteriores expresiones anteriores. Así:

1. La función $f(s)=\langle\alpha(s),e_2\rangle$, $s\in[0,L/2]$ es diferenciable y se anula en los extremos. Por tanto
$$(3)\leq \frac{L^2}{4\pi^2}\int_0^{L/2}\langle\alpha'(s),e_2\rangle^2 ds.$$
2. En la expresión (4) hacemos el cambio de variable $t=s-L/2$. De nuevo, por la desigualdad de Wirtinger,

$$\begin{aligned}
(4) &= \frac{L^2}{4\pi^2}\int_0^{L/2}\langle\alpha(t+L/2),e_2\rangle^2 ds \leq \frac{L^2}{4\pi^2}\int_0^{L/2}\langle\alpha'(t+L/2),e_2\rangle^2 ds \\
&= \frac{L^2}{4\pi^2}\int_{L/2}^{L}\langle\alpha'(s),e_2\rangle^2 ds
\end{aligned}$$

Estudiamos ahora las expresiones (1) y (2). Sea la aplicación

$$g(s)=\int_s^{s+L}\langle\alpha(u),e_1\rangle^2 du=\int_0^{s+L}\langle\alpha(u),e_1\rangle^2 du-\int_0^{s}\langle\alpha(u),e_1\rangle^2 du$$

Si derivamos, $g'(s)=0$, para cualquier s, luego la aplicación g es constante. Sea s_0 del lema anterior. Entonces

$$\begin{aligned}(1)+(2) &= \int_0^L \langle\alpha(s),e_1\rangle^2 ds = \int_{s_0}^{s_0+L} \langle\alpha(s),e_1\rangle^2 ds\\ &= \int_0^L \langle\alpha(s+s_0),e_1\rangle^2 ds\\ &= \int_0^{L/2} \langle\alpha(s+s_0),e_1\rangle^2 ds + \int_{L/2}^{L} \langle\alpha(s+s_0),e_1\rangle^2 ds\\ &= (1')+(2').\end{aligned}$$

Aplicamos la desigualdad de Wirtinger a las expresiones $(1')$ y $(2')$.

1. En $(1')$ se realiza el cambio $t = s - s_0$:

$$\begin{aligned}(1') &= \int_0^{L/2} \langle\alpha(t+s_0),e_1\rangle^2 dt \leq \frac{L^2}{4\pi^2}\int_0^{L/2} \langle\alpha'(t+s_0),e_1\rangle^2 dt\\ &= \frac{L^2}{4\pi^2}\int_{s_0}^{s_0+L/2} \langle\alpha'(s),e_1\rangle^2 ds.\end{aligned}$$

2. En $(2')$ hacemos el cambio de variable $t = s - s_0 - L/2$, quedando

$$\begin{aligned}(2') &= \int_0^{L/2} \langle\alpha(t+s_0+L/2),e_1\rangle^2 dt \leq \frac{L^2}{4\pi^2}\int_0^{L/2} \langle\alpha'(t+s_0+L/2),e_1\rangle^2 dt\\ &= \frac{L^2}{4\pi^2}\int_{s_0+L/2}^{s_0+L} \langle\alpha'(s),e_1\rangle^2 ds.\end{aligned}$$

Por tanto

$$(1')+(2') \leq \frac{L^2}{4\pi^2}\int_{s_0}^{s_0+L} \langle\alpha'(s),e_1\rangle^2 ds.$$

Pero haciendo un razonamiento análogo al que se hizo para la función $g(s)$, esta última integral es igual que

$$\int_0^L \langle\alpha'(s),e_1\rangle^2 ds.$$

Por tanto, la expresión (5) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
(5) \quad &\leq \frac{L^2}{4\pi^2}\left(\int_0^L \langle\alpha'(s), e_2\rangle^2 ds + \int_0^L \langle\alpha'(s), e_1\rangle^2\right) \\
&= \frac{L^2}{4\pi^2}\int_0^L |\alpha'(s)|^2 ds = \frac{L^3}{4\pi^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{4A(\Omega)^2}{L} \leq \frac{L^3}{4\pi^2},$$

obteniendo la desigualdad deseada.

Es evidente que una circunferencia verifica la igualdad en la desigualdad isoperimétrica. Supongamos ahora que tenemos la igualdad. Entonces se tiene $\alpha(s)$ y $N(s)$ son vectores proporcionales $\forall s \in \mathbb{R}$. Luego existe $\lambda(s)$ tal que $\alpha(s) = \lambda(s)N(s)$.

Derivando y usando las ecuaciones de Frenet se deduce que λ es constante y que $|\alpha(s)| = R = |\lambda|$, es decir, α es una circunferencia. Con esto finaliza la demostración de la desigualdad isoperimétrica.

Si analizamos las igualdades que se dan, justamente las igualdades en las veces que hemos utilizado la desigualdad de Wirtinger, se tiene la siguiente información de la curva α.

En la expresión (3) se tiene $\langle\alpha(s), e_2\rangle = a\sin(\frac{2\pi s}{L})$, $\forall s \in [0, L/2]$. En (4), $\langle\alpha(s + L/2), e_2\rangle = b\sin(\frac{2\pi s}{L})$, $\forall s \in [0, L/2]$. Si hacemos el cambio de variable $s + L/2 \to s$, entonces

$$\langle\alpha(s), e_2\rangle = b\sin(\frac{2\pi}{L}(s - L/2)) = -b\sin(\frac{2\pi s}{L})\ \forall s \in [L/2, L]$$

Derivando las dos expresiones

$$\langle\alpha'(s), e_2\rangle = \frac{2\pi a}{L}\cos(\frac{2\pi s}{L}),\ s \in [0, L/2].$$

$$\langle \alpha'(s), e_2 \rangle = -\frac{2\pi b}{L} \cos(\frac{2\pi s}{L}), \ \ s \in [L/2, L].$$

Entonces

$$\begin{cases} \langle \alpha'(0), e_2 \rangle = \frac{2\pi a}{L} \\ \langle \alpha'(L), e_2 \rangle = -\frac{2\pi b}{L} \end{cases}$$

Como consecuencia se tiene $b = -a$ y por tanto,

$$\langle \alpha(s), e_2 \rangle = a \sin(\frac{2\pi s}{L}) \quad \forall s \in [0, L].$$

Ya que $s_0 \in (0, L/2)$, $\alpha(s_0) = p_3$ que es paralelo a e_2. Como $\alpha(s)$ se encuentra en una circunferencia de centro el origen, $\alpha'(s_0)$ es perpendicular a e_2. Por tanto

$$0 = \frac{2\pi a}{L} \cos(\frac{2\pi s_0}{L}) \Rightarrow s_0 = L/4.$$

Por tanto, $\langle \alpha(s_0), e_2 \rangle = a$ y $\langle \alpha(s_0), e_1 \rangle = 0$. Luego $a^2 = R^2$ y $a = -R$. Entonces

$$\langle \alpha(s), e_2 \rangle = -R \sin(\frac{2\pi s}{L})$$

$$\langle \alpha(s), e_1 \rangle = \pm R \cos(\frac{2\pi s}{L}),$$

en $[0, L]$. Como la curva está positivamente orientada,

$$\alpha(s) = R\left(-\cos(\frac{s}{R}), -sin(\frac{s}{R})\right)$$

que es una circunferencia de radio R. *q.e.d*

