# CURVAS PLANAS CONVEXAS

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

**Material docente para el alumno**
*Asignatura:* Geometría Diferencial. Curso 1995/96
*Licenciatura*: Matemáticas (Plan 1973)
Universidad de Granada

**Definición 1** *Una curva se dice que es convexa si la recta tangente en cada punto deja a la curva completamente a uno de los lados que determina dicha recta.*

Observemos que la curva debe ser regular para que existan rectas tangentes. Aclaramos un poco el concepto de curva convexa. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular y denotamos por $l_s$ la recta tangente en $s$, es decir, es la recta que pasa por el punto $\alpha(s)$ y tiene vector director $\alpha'(s)$. El concepto de recta tangente no depende de la reparametrización de la curva y por tanto, podemos suponer, a partir de ahora, que la curva está parametrizada por el arco. Si $\{T(s), N(s)\}$ es el diedro de Frenet en cada punto $s$, entonces la ecuación de $l_s$ es

$$(x, y) \in l_s \Leftrightarrow \langle (x, y) - \alpha(s), N(s)\rangle = 0.$$

Sean los semiplanos cerrados que determina $l_s$ en $\mathbb{R}^2$:

$$l_s^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \langle (x, y) - \alpha(s), N(s)\rangle \geq 0\}.$$

$$l_s^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \langle (x, y) - \alpha(s), N(s)\rangle \leq 0\}.$$

Entonces, decir que la curva es convexa es lo mismo que decir que para cada $s \in I$,

$$\alpha(\mathbb{R}) \subset l_s^+ \text{ o } \alpha(\mathbb{R}) \subset l_s^-.$$

Se deduce pues, que la intersección de la recta tangente en cada punto con $\alpha(\mathbb{R})$ puede ser más de un punto.

**Proposición 1** *Sea $\alpha$ una curva cerrada convexa parametrizada por el arco. Entonces es una curva simple.*

*Demostración*: Supongamos que la curva no es simple. Probamos primero que si $s_1, s_2 \in [0, L)$ distintos tales que $\alpha(s_1) = \alpha(s_2)$ entonces $l_{s_1} = l_{s_2}$. Después de un movimiento rígido, podemos suponer que $\alpha(s_1) = \alpha(s_2) = (0, 0)$ y que $l_{s_1}$ es el eje de abcisas. Ya que la curva es convexa, la traza de la curva está contenida en uno de los dos semiespacios que determina $l_s$. Podemos suponer que $\alpha(\mathbb{R})$ está contenida en el semiplano superior.

Se define $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ como $f(s)=\langle\alpha(s),(0,1)\rangle$. Ya que $f(s)\geq 0$ y $f(s_2)$ es un mínimo absoluto, $f'(s_2)=\langle\alpha'(s_2),(0,1)\rangle=0$ y por tanto $\alpha'(s_2)$ está contenido en $l_{s_1}$ y $l_{s_1}=l_{s_2}$.

Veamos ahora que entornos de $s_1$ y $s_2$ en $\alpha$ coinciden y donde el parámetro cambia salvo una traslación. La curva $\alpha$, en entornos de $s_1$ y $s_2$, es un grafo de una función diferenciable definida en un entorno de 0. Concretamente existen $\epsilon,\delta,\eta>0$ y funciones diferenciables $f,g:(-\epsilon,\epsilon)\to\mathbb{R}$, verificanco

$$f(0)=g(0)=0 \qquad f'(0)=g'(0)=0 \qquad f,g\geq 0$$
$$G(f)=\alpha(s_1-\delta,s_2+\delta) \qquad G(g)=\alpha(s_2-\eta,s_2+\eta).$$

Exactamente, existen difeomorfismos $\phi:(-\epsilon,\epsilon)\to(s_1-\delta,s_1+\delta)$ y $\psi:(-\epsilon,\epsilon)\to(s_2-\eta,s_2+\eta)$, $\phi',\psi'>0$ tales que $\phi(0)=s_1$, $\psi(0)=s_2$ y

$$\alpha(\phi(t))=(t,f(t)).$$
$$\alpha(\psi(t))=(t,g(t)).$$

Sea $R_k$ la recta paralela al eje de abcisas que pasa por el punto $(0,k)$. Afirmamos que existe $r>0$ tal que si $0<k<r$, la recta $R_k$ interseca a $\alpha$ en dos puntos, es decir, $f=g$ en $(-\epsilon,\epsilon)$. Si no fuera así, existe una sucesión de números positivos $\{r_n\}\to 0$ tal que para cada $n\in\mathbb{N}$, $R_{r_n}$ interseca a $\alpha$ en tres puntos al menos. Sea $r_n<r_m$ y $p_1,p_2,p_3\in R_{r_2}\cap\alpha(\mathbb{R})$, siendo $p_2$ el punto que se encuentra entre los otros dos. Como $\alpha$ es una curva convexa, $R_{r_2}$ es la recta tangente a $\alpha$ en $p_2$. Pero dicha recta deja puntos de la curva a ambos lados, llegando a una contradicción.

Ya que $f=g$,

$$\phi'(t)^2=1+f'(t)^2=1+g'(t)^2=\psi'(t)^2$$

luego existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $\phi(t)=\psi(t)+\lambda$. En $t=0$, se deduce que $\lambda=s_1-s_2$ y por tanto, $\forall t\in(s_1-\delta,s_1+\delta)$,

$$\alpha(s)=\alpha(s+s_1-s_2).$$

Se define el siguiente subconjunto de $[0, L)$:

$$A = \{s \in [0, L); \alpha(s) = \alpha(s + s_1 - s_2)\}.$$

Este conjunto no es vacío, pues $s_2 \in A$. Además es evidente que $A$ es un conjunto cerrado. Veamos ahora que $A$ es abierto. Sea $s' \in A$. Haciendo un razonamiento análogo al que se ha hecho antes para $s_2$, se deduce que existe $\delta > 0$ tal que $\forall s \in (s' - \delta, s' + \delta)$,

$$\alpha(s) = \alpha(s + (s' + s_1 - s_2) - s') = \alpha(s + s_1 - s_2).$$

Por conexión, $A = [0, L)$, es decir, $\lambda = s_1 - s_2$ sería un periodo de $\alpha$, pero entonces tenemos una contradicción, pues $|s_1 - s_2| < L$.

*q.e.d*

Estudiamos ahora qué tipo de intersección tiene una recta que corta a una curva convexa.

**Proposición 2** *Sea $\alpha$ una curva cerrada y convexa y $l$ una recta del plano.*

1. *Si $l$ corta a la curva en un punto, entonces $l$ es la recta tangente a $\alpha$ en dicho punto.*
2. *Si $l$ es la recta tangente a la curva en dos puntos, entonces el segmento de $l$ que une dichos puntos, está incluido en la traza de la curva.*
3. *Si $l$ interseca en tres puntos a la curva, entonces el segmento de $l$ que une dichos puntos, está incluido en la traza de la curva.*

*Demostración*: 1. Supongamos que $l$ es el eje de abcisas y que $s_0 \in (0, L)$ es un punto verificando

$$\alpha([0, L)) \cap l = \{\alpha(s_0)\}.$$

 

Demostramos que la curva se encuentra a uno de los lados que determina $l$. Si no fuera así, existirían puntos $p = \alpha(s_1)$, $q = \alpha(s_2)$ de la curva a ambos lados de $l$ ($s_1 < s_2$ y $s_1, s_2 \in [0, L)$).

Se considera el arco $\alpha([s_1, s_2])$. Por conexión, este arco debe intersecar a $l$ en un punto y por tanto, dicho punto es justamente $\alpha(s_0)$. De aquí se deduce que $s_1 < s_0 < s_2$.

Por otra parte, el arco $\alpha([s_2, L] \cup [0, s_1]) = \alpha([s_2, s_1 + L])$ debe intersecar de nuevo a $l$ y por tanto, existe $s^* \in [0, s_1) \cup (s_2, L]$ tal que $\alpha(s^*) = \alpha(s_0)$. Como la curva es simple, $|s^* - s_0| = L$, lo cual es falso.

2. Sea $l$ una recta tangente a $\alpha$ en $s_1, s_2 \in [0, L)$. Como la curva es convexa, la curva se encuentra a un lado de $l$. Supongamos que el segmento de $l$ que une $\alpha(s_1)$ con $\alpha(s_2)$ no se encuentra contenido en la traza de la curva. Después de un movimiento rígido, podemos suponer que $l$ es el eje de abcisas, la curva se encuentra por encima de $l$, que el origen $(0, 0)$ no pertenece a la traza de $\alpha$ y que este punto se encuentra en medio de $\alpha(s_1)$ y $\alpha(s_2)$.

   Se define $f(s) = |\alpha(s)|^2$. Entonces $f$ es positiva y ya que $f(\mathbb{R}) = f([0, L])$, alcanza un mínimo absoluto. Sea $s_0$ dicho mínimo. Entonces

   $$f'(s_0) = \langle \alpha(s_0), \alpha'(s_0) \rangle = 0,$$

   es decir, el vector de posición de $\alpha$ en $s_0$ es perpendicular a $l_{s_0}$. La curva se encuentra pues a un lado de $l_{s_0}$. Ya que alguno de los puntos $\alpha(s_1)$ y $\alpha(s_2)$ se encuentran se encuentran por debajo (en caso contrario, $l_{s_0} = l$ y coincidiría con la recta normal), la curva se encuentra contenida completamente por debajo de $l_{s_0}$.

   Se considera ahora la recta normal $r$ a $\alpha$ en $s_0$. Entonces es evidente que dicha recta interseca a $\alpha(r)$ exactamente en el punto $\alpha(s_0)$ (esta recta no puede ser el eje de abcisas, pues entonces $s_0 = s_1$ o $s_2$) y por tanto, por el apartado anterior, $r$ sería tangente a la curva en $s_0$, lo cual es falso.

3. Supongamos que $p, q, r$ son tres puntos de la curva contenidos en la recta $l$ y supongamos que $r$ se encuentra en medio de los otros dos. Afirmamos que $l$

es la recta tangente a $\alpha$ en dicho punto: en caso contrario, la recta tangente sería transversal a $l$ y por tanto, dejaría a $p$ y a $q$ a ambos lados de la recta tangente, lo cual es falso por convexidad.

Por tanto, $l$ es la recta tangente a $\alpha$ en $r$ y por convexidad, la curva se encuentra a un lado de $l$. Probamos que $l$ también es la recta tangente a la curva $\alpha$ en $p$ y en $q$. Para ello, sea $p = \alpha(s_1)$, $q = \alpha(s_2)$ y después de un movimiento rígido, podemos suponer que $l$ es el eje de abcisas y que la curva se encuentra por encima de éste. Entonces la función $f(s) = \langle \alpha(s), (0,1) \rangle$ alcanza en $s_1, s_2$ mínimos relativos, luego

$$\langle \alpha'(s_i), (0,1) \rangle = 0, \qquad i = 1, 2,$$

es decir, $\alpha'(s_i) \subset l$. Por el apartado anterior, el segmento de $l$ que une $p$ con $q$ se encuentra contenido en la curva.

*q.e.d*

**Corolario 1** *Sea $\alpha$ una curva cerrada convexa y $l$ una recta del plano. Entonces caben las siguientes posibilidades:*

1. *$l$ no interseca a la curva, o*
2. *$l$ interseca a la curva en exactamente un punto, y por tanto, es la recta tangente a la curva en dicho punto, o*
3. *$l$ interseca a la curva en exactamente dos puntos y la recta es transversal a la curva, o*
4. *$l$ interseca a la curva en un único segmento de recta.*

**Proposición 3** *Sea $\alpha$ una curva cerrada parametrizada por el arco, de periodo $L$, $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha'(s_0) = (1,0)$. Entonces existe una función $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $C^\infty$, $\theta(s_0) = 0$ y*

$$T(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s)), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

$$\int_0^L k(s)ds = \theta(L) - \theta(0) = 2\pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

*Al número entero $n$ se le llama índice de rotación de la curva.*

Esta función $\theta(s)$ verifica además que $\theta'(s) = k(s)$. La función $\theta$ está dada por

$$\theta(s) = \int_0^s k(u)du$$

y ya que la curva es $L$-periódica, se tiene que la función $s \longmapsto \int_s^{s+L} k(u)du$ es constante. Por tanto, para cada $s \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\int_s^{s+L} k(u)du = 2\pi n$$

siendo $n$ el índice de rotación de la curva.

Observemos que si se reparametriza la curva $\alpha$, mediante $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$, donde $\phi'(s) < 0$, entonces la curvatura cambia de signo y por tanto, el índice de rotación cambia también de signo. También el índice de rotación no cambia, salvo el signo, por reparametrizaciones de la curva.

**Proposición 4** *En una curva cerrada simple, la aplicación $T : \mathbb{R} \to S^1$ es sobreyectiva.*

*Demostración*: Sea $a \in S^1$. Después de un movimiento rígido podemos suponer que $a = (1, 0)$. Sea $v = (0, 1)$. Se define la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante $f(s) = \langle \alpha(s), v \rangle$. Esta aplicación alcanza un máximo y un mínimo absoluto: $s_1, s_2 \in [0, L)$. Por tanto, estos puntos son puntos críticos de $f$:

$$f'(s_i) = \langle \alpha'(s_i), v \rangle = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Por tanto, $\alpha'(s_i) = \pm a$.

Se consideran las rectas tangentes $l_{s_1}, l_{s_2}$. Estas dos rectas son paralelas. Además la curva se encuentra contenida en el dominio determinado por ellas. Ya que la curva es simple, $l_{s_1} \neq l_{s_2}$. Suponemos que la curva está positivamente orientada. Entonces el normal apunta hacia el interior del dominio $\Omega$ que determina la curva. Si $s_2$ es el mínimo absoluto, entonces $N(s_2) = v$ y por tanto, $T(s_2) = a$. *q.e.d*

Por tanto, en la proposición 5, podemos asegurar que existe $s_0$ tal que $\alpha'(s_0)$. Además, después de una reparametrización de la curva (por traslación del parámetro), podemos suponer que $s_0 = 0$.

**Teorema 1 (Teorema de rotación de las tangentes)** *El índice de rotación de una curva cerrada simple es* $\pm 1$*, es decir,*

$$\int_0^L k(s)ds = \pm 2\pi.$$

*Además si la curva está positivamente orientada, el índice es* 1.

Para una curva convexa, es fácil probar este teorema, como se verá más tarde. Gracias al teorema de rotación de tangentes, se va a dar una bonita caracterización de curvas convexas en función de su curvatura.

**Teorema 2** *Sea* $\alpha$ *una curva cerrada simple. Entonces* $\alpha$ *es convexa si y sólo si la curvatura tiene signo constante.*

*Demostración*: Supongamos que la curva es convexa y que $k$ no tiene signo constante. Ya que $k = \theta'$, existen $s_1 < s_0 < s_2$ tales que $\theta(s_1) = \theta(s_2) \neq \theta(s_0)$. Entonces $T(s_1) = T(s_2)$.

De aquí se deduce que las rectas tangentes $l_{s_1}$ y $l_{s_2}$ son rectas paralelas. Si fueran distintas y como la curva es convexa, ésta se encuentra contenida entre estas dos rectas. Ya que el vector normal apunta hacia dentro, $N(s_1) = -N(s_2)$ y por tanto, $T(s_1) = -T(s_2)$, lo cual es falso.

Por tanto, las dos rectas tangentes son iguales y la proposición 3 nos dice que el segmento $\alpha([s_1, s_2])$ es un segmento de recta. En particular, la curvatura es constantemente nula y $\theta$ constante en dicho intervalo, llegando a una contradicción.

 

Supongamos ahora que la curvatura $k$ tiene signo constante. Como la curva está positivamente orientada, $k \geq 0$ (en toda curva cerrada, orientada positivamente, no necesariamente simple, siempre existen puntos donde la curvatura es positiva). Entonces $\theta$ es un función monótona no decreciente. Por reducción al absurdo, supongamos que la curva no es convexa, es decir, existe $s_0$ tal que la curva se encuentra a ambos lados de $l_{s_0}$.

Después de un movimiento rígido, podemos suponer que esta recta es el eje de abcisas. Definiendo la función $f(s) = \langle \alpha(s), (0,1) \rangle$, ésta alcanza un máximo y mínimo absoluto (que no es en ningún caso, $s_0$) en puntos $s_1$ y $s_2$ respectivamente. Ya que son puntos críticos para $f$, las rectas tangentes en $s_1$ y $s_2$ son paralelas al eje de abcisas.

Si la curva está positivamente orientada, $N(s_1) = -(0,1)$ y $N(s_2) = (0,1)$. Por tanto, $T(s_0)$ coincide con alguno de los vectores $T(s_1)$, $T(s_2)$.

Supongamos sin perder generalidad, que $T(s_1) = T(s_0)$ y $s_1 < s_0$. Entonces

$$\theta(s_1) - \theta(s_0) = 2\pi n \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Por el teorema de rotación de tangentes, $\theta(L) - \theta(0) = 2\pi$, y ya que $\theta$ es no decreciente, $n = 0$ o $n = 1$. Supongamos que $n = 0$. Entonces $\theta$ es constante en $[s_1, s_0]$ y por tanto, $k = 0$ en dicho intervalo. Se deduce pues que el segmento que une $\alpha(s_1)$ con $\alpha(s_0)$ está contenido en la curva. Luego $l_{s_1} = l_{s_0}$, llegando a una contradicción.

Si $n = 1$, $\theta(s_0) = \theta(s_1) + 2\pi$. Por el teorema de rotación de las tangentes, $\theta(s_1 + L) - \theta(s_1) = 2\pi$. Por tanto, $\alpha$ es un segmento de recta en $[s_0, s_1 + L]$. De nuevo, las rectas tangentes a $\alpha$ en $s_0$ y $s_1$ coinciden, llegando de nuevo a una contradicción. *q.e.d*

Observemos que la primera implicación no hace uso del teorema de rotación de tangentes.

**Corolario 2** *Sea $\alpha$ una curva cerrada y convexa. Si $\theta(s_1) = \theta(s_2)$, $s_1 < s_2$, entonces $\alpha$ es un segmento de recta en $[s_1, s_2]$.*

**Corolario 3** *Sea $\alpha$ una curva convexa cuya curvatura nunca se anula y $l$ una recta del plano. Entonces se verifica alguna de las tres siguientes posibilidades excluyentes:*

1. *la recta no interseca a la curva.*
2. *la intersección es exactamente un punto y la recta es tangente.*
3. *la intersección es dos puntos y la recta es transversal a la curva.*

Gracias a este teorema y a la proposición 6, se puede dar una demostración simple de que el índice de rotación de una curva cerrada y convexa es $\pm 1$. Denotamos por $\theta$ el ángulo que realiza el vector tangente $T(s)$ con $e_1 = (1, 0)$ (por la proposición 6, podemos asumir que $\theta(0) = 0$), suponemos que la curva está parametrizada por el arco y está positivamente orientada. Ya que $\theta' = k$ y la curva es convexa, el teorema 8 nos dice que $\theta$ es monótona creciente (en la demostración de este hecho, no se hizo uso del teorema de rotación de tangentes). Entonces $\theta(L) - \theta(0) = 2\pi n$, siendo $n \in \mathbb{N}$.

Si $\theta(L) = 0$, entonces $\theta$ sería constante a lo largo de la curva y por tanto, la curva sería una recta, llegando a una contradicción. Por tanto, $2\pi n \geq 2\pi$. Si $n > 1$ y ya que $\theta$ es monótona creciente, existe $s \in (0, L)$ tal que $\theta(s) = 2\pi$. Esto implica que las rectas tangente $l_s$ y $l_L$ son paralelas. Si fueran distintas, entonces la curva estaría incluida en el dominio que determinan dichas rectas, pero entonces se llega a una contradicción, pues entonces (ver demostración del teorema 8), $T(s) = T(L)$. Por tanto las dos rectas son iguales y de la proposición 3, el segmento $[\alpha(s), \alpha(L)]$ está incluido en $\alpha(\mathbb{R})$. Entonces $\theta$ es constante en $[s, L]$, lo cual es falso llegando a una contradicción.

**Proposición 5** *Sea $\alpha$ una curva cerrada convexa y $\Omega$ el dominio acotado que determina. Entonces $\Omega$ y $\overline{\Omega} = \Omega \cup \alpha(\mathbb{R})$ son conjuntos convexos.*

*Demostración*: Necesitamos primero el siguiente hecho que pasamos a probar:

*Sea $p \in \Omega$ y $q \in \mathbb{R}^2 - \overline{\Omega}$. Entonces el segmento $[p, q]$ interseca a la curva.*

Para demostrar ésto, y ya que $\Omega$ es un conjunto abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(p) \subset \Omega$. Se define

$$A = \{t \in [0,1]; \forall 0 \leq s < t, (1-s)p + sq \in \Omega\}.$$

Este conjunto no es vacío, pues $r/(|p-q|) \in A$. Es evidente que $A$ es un intervalo abierto, pues $\Omega$ lo es. Como $\mathbb{R}^2 - \overline{\Omega}$ también lo es, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $A = [0, t_0)$. Caben dos posibilidades: el punto $p_0 = (1-t_0)p + t_0 q \in \alpha(\mathbb{R})$ y habríamos acabado, o $p_0 \in \mathbb{R}^2 - \overline{\Omega}$. Es evidente que este último caso es imposible, pues entonces habría una bola centrada en $p_0$ y contenida en $\mathbb{R}^2 - \overline{\Omega}$, en contradicción con el hecho de que $t_0$ sea el extremo de $A$.

Demostramos primero que $\overline{\Omega}$ es convexo. Supongamos que no lo fuera. Entonces existen $p, q \in \overline{\Omega}$ tal que existe un punto $r$ en el segmento $[p, q]$ que no pertenece a $\overline{\Omega}$. Denotamos por $l$ la recta que une $p$ con $q$. Ya que este conjunto es un abierto, existe una bola $B_\delta(r)$ que no interseca a $\overline{\Omega}$.

Se considera la semirrecta que sale de $r$ y pasa por $p$. Entonces existe un punto intermedio entre $r$ y $p$ que pertenece a la curva. De la misma forma, la semirrecta que sale de $r$ y pasa por $q$ debe intersecar a la curva. Si alguno de estos dos puntos no es $p$ o $q$, entonces continuando a lo largo de la semirrecta, y ya que $\Omega$ es acotado, habría otro punto de la curva. Por tanto, $l$ interseca a la curva en al menos tres puntos. Por la proposición 3, el segmento que une estos tres puntos está contenido en la curva. En particular, el segmento $[p, q]$ y por tanto, $r$ pertenece a la curva, lo cual es falso.

Como conclusión $p, q$ son puntos de la curva, el segmento abierto $(p, q) \subset \mathbb{R}^2 - \overline{\Omega}$ y $l$ interseca a la curva en al menos dos puntos distintos. Continuando con una de las semirrectas y de nuevo usando que $\Omega$ es acotado, habría otro punto de intersección de $l$ con la curva: habría pues al menos tres y de nuevo se llega a una contradicción.

Demostramos ahora que $\Omega$ es convexo por reducción al absurdo. Sean puntos $p, q \in \Omega$ y $r \in [p, q]$ que no pertenece a $\Omega$. Caben dos posibilidades:

- $r$ es un punto de la curva. Como $\Omega$ es acotado, la semirrecta que parte de $r$ y pasa por $p$ debe intersecar de nuevo a la curva en otro punto distinto de $r$.

De la misma forma se hace con la semirrecta que sale de $r$ y pasa por $q$. Por tanto, $l$ interseca en al menos tres puntos a la curva, luego el segmento que une dichos puntos está contenido en la curva, en particular, los puntos $p$ y $q$, lo cual es falso.

- $r \notin \overline{\Omega}$. Este caso no puede ser, ya que por ser $\overline{\Omega}$ un convexo y $p, q \in \overline{\Omega}$, el segmento que los une está contenido en $\overline{\Omega}$.

*q.e.d*

**Proposición 6** *Sea $\alpha$ una curva cerrada simple y $\Omega$ el dominio interior que determina. Entonces $\alpha$ es una curva convexa si y sólo si $\Omega$ es un dominio convexo.*

*Demostración*: Sólo hay que probar que si $\Omega$ es un dominio convexo, entonces la curva es convexa (es un hecho fácil de probar que si $\Omega$ es convexo, entonces su adherencia $\overline{\Omega}$ también es un conjunto convexo). Si la curva no fuera convexa, existiría un punto $p$ de la curva, cuya recta tangente deja puntos de la curva a ambos lados de dicha recta.

Si $p = \alpha(s_0)$, $\alpha$ es un grafo en un entorno de $s_0$ y por tanto, como la curva no es convexa, existe una recta $l$ que pasa por $p$, transversal a la recta tangente en $p$ y que contiene puntos $q, r$ de la curva a ambos lados de ésta.

Podemos suponer que estos dos puntos son los últimos puntos de la curva en cada una de las semirrecta que parten de $p$ y que determina $l$ (ya que la traza de la curva es compacta).

Ya que $\overline{\Omega}$ es convexo, $[q, r] \subset \overline{\Omega}$. Si todo el segmento está contenido en la traza de la curva, entonces $l$ no sería la recta tangente a $\alpha$ en $p$, Por tanto, existe $p' \in [q, r]$ tal que $p' \in \Omega$ y $p' \in [p, r]$. Sea $r > 0$ tal que $B_r(p') \subset \Omega$. Uniendo todos los segmentos que unen los puntos de esta bola con $q$ se tiene que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \cap (\mathbb{R}^2 - \overline{\Omega}) = \emptyset$, lo cual es falso.

*q.e.d*

**Definición 2** *Una curva con curvatura $k$ que nunca se anula, se llama óvalo.*

Del teorema 8 y del corolario 10 se tiene

**Corolario 4** *Sea una curva cerrada simple que sea un óvalo. Entonces es una curva convexa. Además toda recta tangente a la curva deja a ésta estrictamente a una lado de ella, es decir, en notación de la definición 1,* $\alpha(\mathbb{R}) \cap l_s = \{\alpha(s)\}$.

Por otra parte, existen curvas cerradas que son óvalos y que no son simples.

**Corolario 5** *Para una curva cerrada simple que sea un óvalo, la aplicación* $T : [0, L) \to S^1$*, dada por* $T : s \longmapsto T(s)$ *es biyectiva.*

*Demostración*: Por la proposición 6, sólo hay que probar la inyectividad. Supongamos que $T(s) = T(t)$. Entonces las rectas tangentes son paralelas. Si no fueran iguales, y ya que la curva es convexa, se tiene que $T(s) = -T(t)$. Por tanto, las rectas tangentes coinciden. Pero por la proposición 3, si $s \neq t$, el segmento que une estos puntos está incluido en la curva y por tanto la curvatura se anula, llegando a una contradicción con el hecho de que la curva sea un óvalo. Por tanto, $s = t$. *q.e.d*

**Definición 3** *Sea* $\alpha$ *una curva cerrada convexa y óvalo. Para cada* $s \in [0, L)$*, sea* $s' \in [0, L)$ *tal que* $T(s') = -T(s)$*. Este punto* $s'$ *es único. Sea* $w(s)$ *la distancia entre las rectas* $l_s$ *y* $l_{s'}$.

*En estas condiciones, decimos que la curva tiene anchura constante si* $w(s)$ *es constante para todo* $s \in [0, L]$.

**Teorema 3 (Barbier)** *Una curva cerrada simple que sea un óvalo de anchura* $d$ *tiene longitud* $\pi d$.

*Demostración*: Para cada $s \in \mathbb{R}$, sea $\beta(s)$ el punto cuyo vector tangente sea $-T(s)$. Entonces $\beta$ es una curva cerrada, de periodo $L$ y cuya traza coincide con la traza de $\alpha$.

 

Existen funciones diferenciables $\lambda, \mu$ tales que

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s).$$

Entonces $\mu(s) = w(s)$ es la anchura para el punto $s$. Por hipótesis, $\mu(s) = d$. Derivando,

$$\beta'(s) = (1 + \lambda'(s) - dk(s))T(s) + (\lambda(s)k(s))N(s).$$

Entonces $\lambda(s)k(s) = 0$ y ya que la curva es un óvalo, $\lambda(s) = 0$. Por tanto, $\beta'(s) = (1-dk(s))T(s)$. Ya que la longitud de $\beta$ es la misma que $\alpha$, $\langle \beta'(s), T(s)\rangle < 0$ y usando el teorema de rotación de las tangentes se tiene

$$L = \int_0^L |\beta'(s)|ds = \int_0^L (-1 + dk(s))ds = -L + 2\pi d,$$

luego $L = \pi d$. *q.e.d*

Para curvas cerradas convexas que son óvalos es fácil probar el teorema de los cuatro vértices. Un *vértice* en una curva es un punto que es crítico para la función curvatura, es decir, $s$ es un vértice si $k'(s) = 0$. Toda curva cerrada tiene al menos dos vértices: el máximo y mínimo absoluto de la función $k(s)$. El teorema de los cuatro vértices nos dice

*Toda curva cerrada simple tiene al menos cuatro vértices.*

Probamos este teorema para una curva cerrada convexa con $k \neq 0$. Podemos suponer que la curva está parametrizada por el arco y positivamente orientada (no afecta al número de vértices). Esta condición implica que $k > 0$.

Supongamos que existen dos vértices. Entonces éstos son los extremos absolutos de $k$. Sea $l$ la recta que une estos puntos $p, q$. Esta recta no es tangente a la curva, pues tiene dos puntos de intersección con ella (corolario 10). De nuevo, usando este corolario, no hay más puntos de intersección. Supongamos sin perder generalidad que $p = \alpha(s_0)$ y $q = \alpha(s_1)$, con $s_0 < s_1$ y que $k$ es creciente en $(s_0, s_1)$, es decir, $k' > 0$ y $k$ es decreciente en $[0, s_0) \cup (s_1, L]$, $k' < 0$.

 

Sea $Ax + By + C = 0$ la ecuación de la recta $l$, con $A^2 + B^2 = 1$, y se define la función $f : [0, L] \to \mathbb{R}$

$$f(s) = \langle \alpha(s), (A, B) \rangle,$$

que nos mide la distancia (con signo) de los puntos de la curva a $l$. Esta función toma valores positivos y negativos en cada uno de los arcos $(s_0, s_1)$, $[0, s_0) \cup (s_1, L]$.

Por tanto, la función $s \longmapsto k'(s)f(s)$ tiene signo en $[0, L]$, anulándose sólamente en $s_0$ y $s_1$. Luego

$$0 \neq \int_0^L k'(s)f(s)ds = k(s)f(s)|_{s=0}^{s=L} - \int_0^L$$

$$= -\int_0^L \langle N'(s), (A, B) \rangle ds = -\int_0^L \langle N(s), (A.B) \rangle' ds = 0,$$

llegando a una contradicción.

**Teorema 4 (Schur)** *Sea $\alpha, \tilde{\alpha} : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ dos curvas planas convexas, parametrizadas por el arco, no necesariamente cerradas y de la misma longitud $L$. Denotamos por $k$ y $\tilde{k}$ la curvaturas de $\alpha$ y $\tilde{\alpha}$ y por $d$ y $\tilde{d}$ las longitudes de las cuerdas de $\alpha$ y $\tilde{\alpha}$, respectivamente, es decir,*

$$d(s) = |\alpha(s) - \alpha(0)|, \qquad \tilde{\alpha}(s) = |\tilde{\alpha}(s) - \tilde{\alpha}(0)|.$$

*Si $k(s) \geq \tilde{k}(s) \geq 0$, $s \in [0, L]$, entonces $d(s) \leq \tilde{d}(s)$, $s \in [0, L]$.*

*Demostración*: Sea $s_1 \in [0, L]$ y veamos que $d(s_1) \leq \tilde{d}(s_1)$. Si $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $\tilde{\alpha}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$, colocamos las dos curvas en el semiplano $y \leq 0$ con los puntos $\alpha(0), \alpha(s_1), \tilde{\alpha}(0), \tilde{\alpha}(s_1)$ en el eje de abcisas y $x(0) < x(s_1)$, $\tilde{x}(0) < \tilde{x}(s_1)$.

Sea $s_0 \in [0, s_1]$ tal que $\alpha'(s_0)$ es paralelo al eje de abcisas y elegimos $\theta$ para que $\theta(s_0) = 0$. Ya que la curva es convexa, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Entonces

$$\theta^*(s) := \tilde{\theta}(s) - \tilde{\theta}(s_0) = \int_{s_0}^s \tilde{\theta}'(u)du = \int_{s_0}^s \tilde{k}(u)du.$$

Si $s \geq s_0$,

$$\int_{s_0}^{s} \tilde{k}(u)du \leq \int_{s_0}^{s} k(u)du = \theta(s).$$

Si $s \leq s_0$,

$$\int_{s_0}^{s} \tilde{k}(u)du \geq \int_{s_0}^{s} k(u)du = \theta(s).$$

Como $\theta$ y $\tilde{\theta}$ son funciones monótonas crecientes,

$$s \geq s_0, 0 \leq \theta^*(s) \leq \theta(s) \rightarrow \cos\theta^*(s) \geq \cos\theta(s).$$

$$s \leq s_0, \theta(s) \leq \theta^*(s) \leq 0 \rightarrow \cos\theta(s) \leq \cos\theta^*(s).$$

Por tanto,

$$\cos\theta(s) \leq \cos\theta^*(s), \forall s \in [0, s_1]. \qquad (*)$$

Ya que $\cos\theta(s) = \langle \alpha'(s), e_1 \rangle = x'(s)$,

$$d(s_1) = x(s_1 - x(0) = \int_0^{s_1} \cos\theta(s)ds.$$

Por la misma razón,

$$\tilde{d}(s_1) = \int_0^{s_1} \cos\tilde{\theta}(s)ds.$$

Por otra parte,

$$\cos\tilde{\theta}(s) = \langle \tilde{T}(s), \tilde{T}(s_0) \rangle = \tilde{x}'(s_0)\tilde{x}'(s) + \tilde{y}'(s_0)\tilde{y}'(s)$$

y entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{s_1} \cos\theta^*(s)ds &= \tilde{x}'(s_0)\left(\tilde{x}(s_1) - \tilde{x}(0)\right) \\ &= \cos\tilde{\theta}(s_0) \int_0^{s_1} \cos\tilde{\theta}(s)ds \leq \int_0^{s_1} \cos\tilde{\theta}(s)ds = \tilde{d}(s_1). \end{aligned}$$

 

De la ecuación $(*)$,

$$d(s_1) = \int_0^{s_1} \cos\theta(s)ds \leq \int_0^{s_1} \cos\theta^*(s)ds \leq \tilde{d}(s_1).$$

Si diera igualdad, se deduce que $k(s) = \tilde{k}(s)$, para cada $s \in [0, L]$, entonces $\alpha$ y $\tilde{\alpha}$ difieren de un movimiento rígido. *q.e.d*

Del teorema de Schur, se deduce numerosas consecuencias. Por ejemplo, gracias a él, es fácil probar el teorema de los cuatro vértices para curvas convexas. Dada una curva cerrada convexa, existen un máximo y mínimo absoluto de la función curvatura $k$: $p_1, p_2$, y en cada u no de los dos arcos que determinan dichos puntos, la función $k$ es monótona. Supongamos que no existen más extremos relativos de $k$.

Existen puntos $q_1, q_2$ tales que la recta que lo une divide a la curva en dos arcos de la misma longitud y donde $k$ vale lo mismo. Sean los arcos $q_1p_1q_2$ y $q_1p_2q_2$ de igual longitud y la curvatura del primer arco es mayor que la del segundo arco, en contradicción con el teorema de Schur.

Usando el teorema de Fenchel, se puede probar

**Corolario 6** *La curva espacial cerrada más corta con curvatura $k(s) \leq 1/R$, $R > 0$, es unacircunferencia de radio $R$.*

**Corolario 7** *Sea $C$ un arco que une dos puntos $p, q$ y de curvatura $k(s) \leq 1/R$, siendo $R \geq \frac{d}{2}$, siendo $d = |p - q|$. Sea $S$ una circunferencia de radio $R$ que pasa por $p$ y $q$ y sean $a_1$ y $a_2$ los dos arcos de circunferencia que se determinan, $a_1$ de longitud menor que $a_2$.*

*Entonces la longitud de $C$ es menor que la longitud de $a_1$ o es mayor que la longitud de $a_2$.*