# Tema 7:

# ESPACIOS VECTORIALES MÉTRICOS

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

**Material docente para el alumno**
*Asignatura:* Geometría I. Curso 1998/99
*Licenciatura*: Matemáticas (Plan 1973)
Universidad de Granada

1. En $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ se considera la base ordenada usual $B = (e_1, e_2)$ y las métricas $g, g', g''$ dadas por
$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_B(g') = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad M_B(g'') = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$
Demostrar que $g$ es una métrica euclídea sobre $\mathbb{R}^2$. Probar también que $g'$ es definida negativa y que $g''$ es indefinida. Dar un ejemplo de una métrica degenerada $\widetilde{g}$ sobre $\mathbb{R}^2$ de tal modo que el vector $x = e_1 - 2e_2$ sea perpendicular a cualquier $y \in \mathbb{R}^2$ según $\widetilde{g}$.

2. Demostrar que si las formas cuadráticas asociadas a dos métricas sobre el mismo espacio vectorial real coinciden, entonces las métricas también coinciden.

3. Sea $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ / \ \text{grado}(p(x)) \leq 2\}$. Definimos $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante
$$g\,(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx.$$
*i)* Demostrar que $g$ es una métrica euclídea en $V$.
*ii)* Probar que la base $\{1, x, x^2\}$ no es ortonormal en $(V, g)$, y obtener por el procedimiento de Gram-Schmidt a partir de ella una base ortonormal de $(V, g)$.

4. Sean $(V, g), (V', g')$ dos espacios vectoriales métricos isométricos. Demostrar que $(V, g)$ es no degenerado si y sólo si $(V', g')$ es no degenerado. Probar también que $(V, g)$ es euclídeo (resp. definido negativo) si y sólo si $(V', g')$ es euclídeo (resp. definido negativo).

5. Sea $(V, g)$ un espacio vectorial métrico y sean $V'$ un espacio vectorial y $f : V \longrightarrow V'$ un isomorfismo. Demostrar que existe una única métrica $g'$ en $V'$ que convierte a $f$ en una isometría de $(V, g)$ en $(V', g')$.

6. Demostrar mediante un contraejemplo que si $(V, g)$ es un espacio vectorial métrico y $U$ es un subespacio vectorial de $V$, entonces no existe en general una métrica $g'$ en $V/U$ que cumpla $g'(x + U, y + U) = g(x, y)$, $\forall x, y \in V$.

7. Sea $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden $n$ sobre $\mathbb{R}$. Sobre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ se considera el tensor $g$ dado por

$$g(A,C) = \text{ traza}(AC), \quad \forall A, C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

   *i)* Demostrar que $g$ es una métrica euclídea sobre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

   *ii)* Sea $(V,g)$ un espacio vectorial métrico euclídeo con dimensión $n$ y sea $W = \{f \in \text{ End}_{\mathbb{R}}V \; / \; f \text{ es autoadjunto respecto de } g\}$. Elegimos una base ortornormal ordenada $B$ de $(V,g)$ y definimos el isomorfismo $\widehat{F}_B : W \longrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dado por $\widehat{F}_B(f) = M(f,B)$, $\forall f \in W$. Sobre $W$ consideramos la única métrica euclídea $g_B$ que hace a $\widehat{F}_B$ una isometría de $(W, g_B)$ en $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), g)$. Demostrar que $g_B(f,h) = \text{traza}(f \circ h)$, y que por tanto, $g_B$ no depende de la base $B$ elegida.

8. Sean $V, V'$ dos espacios vectoriales reales y sea $f : V \longrightarrow V'$ un monomorfismo. Demostrar que si $g'$ es una métrica sobre $V'$, entonces el tensor $g$ definido sobre $V$ mediante $g(x,y) = g'(f(x), f(y))$, $\forall x, y \in V$, es una métrica sobre $V$. Probar también que si $g'$ es euclídea, entonces $g$ también lo es. Si $V$ es un subespacio vectorial de $V'$ y $f$ es la inclusión de $V$ en $V'$, ¿quién es $g$?

9. Sea $(V,g)$ un espacio vectorial métrico euclídeo. Probar que dados $x, y \in V$, se tiene

   *i)* $\left\| \frac{1}{2}(x-y) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.

   *ii)* $x$ e $y$ son perpendiculares $\iff$ $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

10. Demostrar usando la desigualdad de Schwarz que si $a_1, \ldots, a_n$ son números reales cualesquiera, entonces

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq n \sum_{\imath=1}^n a_i^2,$$

y que la igualdad es cierta si y sólo si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

 

11. En el espacio euclídeo usual $(\mathbb{R}^3, g_u)$, obtener una base ortonormal aplicando el procedimiento de Gram-Schmidt a la base $\{e_1+e_3, e_1+2e_2, 2e_2+3e_3)$. Calcular también las ecuaciones implícitas, respecto de dicha base, del subespacio ortogonal $U^\perp$, siendo $U = L(\{e_1+e_3, e_2\})$.

12. Sea $(V, g)$ un espacio vectorial métrico euclídeo con dimensión 3, orientado mediante una base ortonormal ordenada $B = (u_1, u_2, u_3)$.

    *i)* Demostrar que $u_1 \times u_2 = u_3$.

    *ii)* Probar que si $x, y \in V$, entonces su producto vectorial $x \times y$ es perpendicular a $x$ y a $y$, y que si $\|x\| = \|y\| = 1$ y $g(x, y) = 0$, entonces $(x, y, x \times y)$ es una base ortonormal ordenada de $(V, g)$ que define la misma orientación que $B$.

13. Sean $(V, g)$ un espacio vectorial métrico (no necesariamente euclídeo) y $U$ un subespacio vectorial de $V$. Si se define $U^\perp = \{x \in V \ / \ g(x, y) = 0 \ \forall y \in U\}$, probar que $U^\perp$ es un subespacio vectorial de $V$ y que $(U, g|_U)$ es no degenerado si y sólo si $U \cap U^\perp = \{0\}$. Demostrar que si $(V, g)$ es no degenerado, entonces $\dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} U^\perp = \dim_{\mathbb{R}} V$.

14. Sea $(V, g)$ un espacio vectorial métrico euclídeo. Dado $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$, se define el *endomorfismo adjunto* de $f$ respecto de $g$ como el único endomorfismo $\widehat{f}$ de $V$ que cumple
$$g(f(x), y) = g(x, \widehat{f}(y)), \quad \forall x, y \in V.$$

    *i)* Demostrar que la relación anterior define un endomorfismo de $V$.

    *i)* Demostrar que la aplicación $H : \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$ definida por $H(f) = \widehat{f}$ es lineal, que su inversa coincide con ella misma y que $H(f \circ h) = H(h) \circ H(f)$, $\forall f, h \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$.

15. Se considera la matriz simétrica real $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Encontrar $P \in O(3, \mathbb{R})$ tal que ${}^tPAP$ sea una matriz diagonal.

16. Sea $(V, g)$ un espacio vectorial métrico euclídeo, y sea $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$ autoadjunto respecto de $g$, verificando $g(f(x), x) \geq 0$, $\forall x \in V$. Demostrar que existe un único endomorfismo $h$ de $V$, autoadjunto respecto de $g$, que cumple las condiciones $g(h(x), x) \geq 0$ $\forall x \in V$, y $h \circ h = f$.

17. En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar usual $g_u$. Sean $F, F'$ las formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}^3$ dadas por
$$\begin{aligned} F(x) &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1a_2 - a_1a_3 + a_2a_3, \\ F'(x) &= 2a_1^2 + 3a_2^2 - a_3^2 - 8a_1a_3, \end{aligned}$$
donde $x = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ y $B = (e_1, e_2, e_3)$ es la base ordenada usual de $\mathbb{R}^3$. Encontrar bases ortonormales de $(\mathbb{R}^3, g_u)$ que diagonalicen a $F$ y a $F'$.

18. Sea $f$ el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por
$$f(a_1, a_2, a_3) = (a_2, a_1 + 2a_3, 2a_2), \quad \forall (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3.$$
Demostrar que $f$ es autoadjunto respecto del producto escalar usual $g_u$ de $\mathbb{R}^3$, y encontrar una base ordenada ortonormal $B$ de $(\mathbb{R}^3, g_u)$ tal que $M(f, B)$ sea diagonal.

19. Sea $(V, g)$ un espacio vectorial métrico con $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. El teorema de Sylvester asegura que existen $s, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ que sólo dependen de $(V, g)$ y existe una base ordenada $B$ de $V$ tales que la matriz de $g$ en $B$ viene dada por
$$M_B(g) = \left( \begin{array}{c|c|c} -I_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_t & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n-(s+t)} \end{array} \right).$$
A $s$ se le llama el *índice*, a $s + t$ el *rango* y a $n - (s + t)$ la *nulidad* de $(V, g)$. Demostrar que estos números caracterizan al espacio vectorial métrico en el siguiente sentido: Dados $(V, g), (V', g')$ espacios vectoriales métricos, se tiene que
$$\textit{i)}\ (V, g) \text{ es isométrico a } (V', g') \iff \left\{ \begin{array}{l} \dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V', \\ \text{Indice}(V, g) = \text{Indice}(V', g'), \\ \text{Rango}(V, g) = \text{Rango}(V', g'). \end{array} \right.$$

*ii)* $(V,g)$ es isométrico a $(V',g') \iff \begin{cases} \dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V', \\ \text{Indice}(V,g) = \text{Indice}(V',g'), \\ \text{Nulidad}(V,g) = \text{Nulidad}(V',g'). \end{cases}$

20. Sea $V$ un espacio vectorial real y $U, U'$ subespacios vectoriales de $V$ tales que $V = U \oplus U'$. Encontrar una métrica euclídea $g$ sobre $V$ tal que $U' = U^\perp$.

21. Sean $V$ un espacio vectorial real de dimensión $n$, $B = (x_1, \ldots, x_n)$ una base ordenada en $V$ y $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Se considera la métrica $g$ sobre $V$ definida por $M_B(g) = A$. Demostrar que $g$ es euclídea si y sólo si todos los valores propios de $A$ son positivos.

22. Se considera en $\mathbb{R}^3$ la métrica definida por

$$g(e_1,e_1) = g(e_1,e_2) = g(e_2,e_3) = 2, g(e_1,e_3) = g(e_3,e_3) = 1, g(e_2,e_2) = 5,$$

donde $B = (e_1, e_2, e_3)$ es la base ordenada usual de $\mathbb{R}^3$.

*i)* Probar que $g$ es una métrica euclídea sobre $\mathbb{R}^3$.

*ii)* Sea $T$ el tensor 2-covariante simétrico dado por $M_B(T) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Encontrar una base ortonormal $B'$ de $(V,g)$ tal que $M_{B'}(T)$ sea diagonal. Encontrar también una base $B''$ de $\mathbb{R}^3$ en la que $T$ adopte su forma canónica del teorema de Sylvester.

23. Sean $(V,g)$ un espacio vectorial métrico euclídeo y $f \in \text{Aut}_{\mathbb{R}} V$.

*i)* Si $\widehat{f}$ representa el endomorfismo de $V$ adjunto de $f$ respecto de $g$, demostrar que $f \circ \widehat{f}$ es diagonalizable y que todos sus valores propios son positivos.

*ii)* Encontrar un automorfismo $h$ de $V$ autoadjunto respecto de $g$, con todos sus valores propios positivos y que cumpla $h \circ h = f \circ \widehat{f}$.

*iii)* Probar que $h^{-1} \circ f$ es una isometría de $(V,g)$.

*iv)* Como aplicación de los anterior, demostrar que toda matriz regular y real $A$ de orden $n$ puede escribirse en la forma $A = PR$, donde $P \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tiene todos sus valores propios positivos y $R \in O(n, \mathbb{R})$ (DESCOMPOSICION POLAR DE UNA MATRIZ).

*v)* Aplicar el apartado anterior a $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in Gl(2, \mathbb{R})$.

24. Sea $(V, g)$ un espacio vectorial métrico euclídeo y sea $U$ un subespacio vectorial de $V$, $U \neq \{0\}, V$. Demostrar que para cada $f \in \text{Iso}(U, g|_U)$ existe $F \in \text{Iso}(V, g)$ tal que $F(x) = f(x)$, $\forall x \in U$. Demostrar que $F$ siempre puede tomarse como una rotación.

25. Sea $V$ un plano vectorial dentro de $\mathbb{R}^3$, y sea $f$ un endomorfismo de $V$. Demostrar que para toda base $\{u, v\}$ de $V$, se cumple $f(u) \times f(v) = (\det f) u \times v$, donde $\times$ denota el producto vectorial usual de $\mathbb{R}^3$. En particular, si $\{u, v\}$ se toma ortonormal respecto de $g|_V$ siendo $g$ el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$, probar que $|\det f| = \|f(u) \times f(v)\|$.

26. En un espacio vectorial métrico euclídeo $(V, g)$ tridimensional se considera una orientación $C(B)$. Para cada $x \in V - \{0\}$, se define $F_x \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$ mediante $F_x(y) = x \times y$, $\forall y \in V$, donde $\times$ denota el producto vectorial en $(V, g)$ relativo a la orientación $C(B)$.

    *i)* Caracterizar $\ker(F_x)$ e $\text{Im}(F_x)$.

    *ii)* Dado $z \in \text{Im}(F_x)$, ¿existe más de un vector $y \in V$ tal que $F_x(y) = z$?

    *iii)* Demostrar que el endomorfismo de $V$ adjunto de $F_x$ respecto de $g$ es $F_{-x} = -F_x$, $\forall x \in V$.

27. Demostrar que para toda matriz $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ se cumple

$$(\text{traza}(A))^2 \leq n \ \text{traza}(A^2),$$

siendo la igualdad cierta si y sólo si $A = aI_n$ para algún $a \in \mathbb{R}$.

28. Sea $(V, g)$ un espacio vectorial métrico euclídeo con dimensión $n$ y sean $f, h$ dos endomorfismos de $V$ autoadjuntos respecto de $g$, verificando $f \circ h = h \circ f$.

    *i)* Probar que los subespacios propios de $f$ (resp. de $h$) son invariantes por $h$ (resp. por $f$).

    *ii)* Demostrar que es posible encontrar una base ortonormal ordenada $B$ de $(V, g)$ tales que $M(f, B)$ y $M(h, B)$ son diagonales (diagonalización simultánea de dos endomorfismos autoadjuntos).

29. Sean $(V, g)$ un espacio vectorial métrico euclídeo y $f$ un endomorfismo de $V$ autoadjunto respecto de $g$. Demostrar que $V$ es suma directa ortogonal de $\ker(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.

30. En un espacio vectorial real $V$ de dimensión $n$ se considera una métrica euclídea $g$.

    *i)* Sea $\# : V^* \longrightarrow V$ la aplicación que a cada forma $\varphi$ del espacio dual $V^*$ de $V$ le asigna el único vector $\varphi^\# \in V$ definido por la ecuación $g(\varphi^\#, x) = \varphi(x)$, $\forall x \in V$. Demostrar que $\#$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, y que si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base ortonormal de $(V, g)$ y $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es su base dual, entonces se tiene que $\varphi_i^\# = x_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

    *ii)* Demostrar que la aplicación $g^* : V^* \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g^*(\varphi, \psi) = g(\varphi^\#, \psi^\#)$ es una métrica euclídea sobre $V^*$, y que el isomorfismo $\#$ del apartado anterior se convierte en una isometría de $(V^*, g^*)$ en $(V, g)$.

    *iii)* Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$ un endomorfismo autoadjunto respecto de $g$. Demostrar que la aplicación traspuesta ${}^t f : V^* \longrightarrow V^*$ (esto es, ${}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$, $\forall \varphi \in V^*$) es un endomorfismo autoadjunto de $V^*$ respecto de la métrica $g^*$. Si $f = p_U$ es la proyección ortogonal de $V$ sobre un subespacio vectorial $U$, probar que ${}^t(p_U)$ coincide con la proyección ortogonal según la métrica $g^*$ de $V^*$ sobre el subespacio anulador de $U^\perp$.

31. Sea $(V, g)$ un espacio vectorial métrico euclídeo de dimensión 2, y $U_1$, $U_2$ dos rectas vectoriales de $V$. Llamemos $S_{U_1}$, $S_{U_2}$ a las simetrías respecto de $U_1, U_2$,

 

respectivamente. Demostrar que

$$S_{U_1} \circ S_{U_2} = S_{U_2} \circ S_{U_1} \iff U_1 = U_2 \text{ ó } U_1 = U_2^{\perp}.$$

32. Sea $(V, g)$ un espacio vectorial métrico euclídeo de dimensión 3, y $U_1, U_2$ dos planos vectoriales de $V$. Llamemos $S_{U_1}$, $S_{U_2}$ a las simetrías respecto de $U_1, U_2$, respectivamente. Demostrar que

$$S_{U_1} \circ S_{U_2} = S_{U_2} \circ S_{U_1} \iff U_1 = U_2 \text{ ó } U_1^{\perp} \subset U_2.$$

(Indicación: Probar que $S_{U_2}$ lleva $U_1^{\perp}$ en sí mismo).

33. En $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ se consideran las métricas $g_1, g_2, g_3$ definidas por sus respectivas matrices de coordenadas respecto de la base ordenada usual $B$:

$$M_B(g_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; M_B(g_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \; M_B(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Discutir razonadamente las posible isometrías que existan entre $(\mathbb{R}^2, g_1)$, $(\mathbb{R}^2, g_2)$ y $(\mathbb{R}^2, g_3)$.

34. Sea $(V, g)$ un espacio vectorial métrico euclídeo con dimensión $n$, y sea $M_B(g)$ la matriz de coordenadas de $g$ respecto de una base ordenada $B$ de $V$. Dado un endomorfismo $f$ de $V$, demostrar que $f$ es una isometría de $(V, g)$ en sí mismo si y sólo si ${}^tM(f, B) \cdot M_B(g) \cdot M(f, B) = M_B(g)$.

35. En $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ se considera la métrica $g$ definida por

$$g\left((a_1, a_2), (b_1, b_2)\right) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

para cualesquiera $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$.

*i)* Probar que $g$ es euclídea y encontrar una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, g)$.

*ii)* Sea $f$ el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido por $M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donde $B_u$ es la base ordenada usual de $\mathbb{R}^2$. Demostrar que $f$ es autoadjunto respecto de $g$ y encontrar una base ortonormal de $(V, g)$ formada por vectores propios de $f$.

36. Sean $V(\mathbb{R})$ un espacio vectorial de dimensión $n$ y $\varphi \in V^*$ una forma lineal no nula. Se considera la aplicación $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$, $\forall x, y \in V$.

    *i)* Demostrar que $g$ es una métrica sobre $V$.

    *ii)* Probar que si $\dim_{\mathbb{R}} V > 1$ entonces $g$ es degenerada, mientras que si $\dim_{\mathbb{R}} V = 1$ entonces $g$ es euclídea.

    *iii)* Encontrar una base ordenada $B$ de $V$ tal que $M_B(g) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-1} \end{array}\right)$

37. Sean $(V, g)$ un espacio vectorial métrico euclídeo con dimensión finita y $f$ una isometría de $(V, g)$ en sí mismo.

    *i)* Probar que $f + f^{-1}$ es autoadjunto respecto de $g$.

    *ii)* Suponiendo que $f$ no tiene valores propios, demostrar que existe un subespacio vectorial $U$ de $V$ de dimensión 2 tal que $f_*(U) \subseteq U$.

    *iii)* Suponiendo que $\det(f) = -1$ y $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$, probar que $f$ tiene dos valores propios distintos.

    *iv)* Suponiendo sólamente que $\det(f) = -1$, demostrar que $f$ tiene al menos un valor propio (indicación: usar los apartados *ii)* y *iii)* repetidamente).

    *v)* Suponiendo $\det(f) = 1$ y que la dimensión de $V$ es impar, probar que 1 es valor propio de $f$ (indicación: razonando por reducción al absurdo, aplicar el apartado *iv)* a la restricción de $f$ al subespacio ortogonal del subespacio propio asociado al valor propio $-1$ de $f$).