Tema 6:

DIAGONALIZACIÓN

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 1998/99
Licenciatura: Matemáticas (Plan 1973)
Universidad de Granada

1. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial $V(\mathbb{K})$ de dimensión n. Probar que 0 es un valor propio de f si y sólo si f no es inyectiva.

2. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial n-dimensional. Si a es un valor propio de un endomorfismo f de V, probar que a^m, $m \in \mathbb{N}$, es un valor propio de f^m. Si además f es un automorfismo, demostrar que $\forall p \in \mathbb{Z} - \{0\}$, a^p es un valor propio de f^p.

3. Determinar los vectores propios y valores propios de las siguientes matrices reales,
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
¿Es alguna de estas matrices diagonalizable en $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? ¿Hay alguna de ellas que no sea diagonalizable en $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pero sí lo sea en $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

4. Sean $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $A' \in \mathcal{M}_{m\times(n-m)}(\mathbb{K})$ y $A'' \in \mathcal{M}_{(n-m)\times(n-m)}(\mathbb{K})$. Se considera la matriz sobre $\mathbb{K}$ de orden n
$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & A' \\ \hline 0 & A'' \end{array}\right)$$
Demostrar que el polinomio característico de M es el producto de los polinomios característicos de A y de A''.

5. Dar tres ejemplos de endomorfismos de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ que, respectivamente, tengan por polinomios característicos
$$(1-t)^3, \qquad -(1-t)^2(1+t), \qquad (1-t)(t^2+1),$$
y estudiar si los endomorfismos dados son o no diagonalizables.

6. Sean n un número entero positivo, $\mathbb{K}$ un cuerpo y $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Demostrar

que la matriz A de orden n sobre $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

tiene polinomio característico

$$p_A(t) = (-1)^n(a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n),$$

y que si $a \in \mathbb{K}$ es un valor propio de A, entonces el vector $(1, a, a^2, \ldots, a^{n-1})$ es un vector propio de A de valor propio a.

7. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial n-dimensional $V(\mathbb{K})$, y sea ${}^t f : V^* \longrightarrow V^*$ su traspuesto. Probar que f y ${}^t f$ tienen el mismo polinomio característico y que los subespacios propios de V y V^* correspondientes a los mismos valores propios tienen la misma dimensión. Concluir entonces que f es diagonalizable si y sólo si ${}^t f$ lo es.

8. Probar que toda matriz real de orden dos con determinante negativo es diagonalizable.

9. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz tal que la suma de los elementos de cada línea (fila y columna) es 1. Demostrar que 1 es un valor propio de A.

10. Se considera el tensor T de tipo $(1,1)$ sobre $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ dado por $T = \sum_{i,j} t_i^j \varphi^i \otimes e_j$, donde $B = (e_1, e_2, e_3)$ es la base ordenada usual de $\mathbb{R}^3$, $B^*(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$ su base ordenada dual y $t_i^j = i + j$, $\forall i, j = 1, 2, 3$. Probar que existe una base ordenada $B' = (x_1, x_2, x_3)$ de manera que si $(\varphi'^1, \varphi'^2, \varphi'^3)$ es su base ordenada dual, entonces $T = \sum_{i,j} (t')_i^j \varphi'^i \otimes x'_j$, siendo $(t')_i^j = 0$ si $i \neq j$.

11. Demostrar que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, entonces $A^2 - \text{traza}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.

12. Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que traza$(A) = \det(A) = 0$. Probar que $A^2 = 0$. Recíprocamente, dada $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verificando $A^2 = 0$, demostrar que $A = 0$ o bien $\{A, I_2\}$ son linealmente independientes y por tanto traza$(A) = \det(A) = 0$.

13. En $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular A^{12} y A^{-7}. ¿Es posible encontrar $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $B^2 = A$?. ¿Es posible encontrar $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tal que $C^2 = A$?.

14.

i) Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial $V(\mathbb{K})$. Probar que si su ecuación característica $p_f(t) = 0$ tiene $n = \dim_{\mathbb{K}} V$ soluciones en $\mathbb{K}$ (no necesariamente distintas), entonces existe una base ordenada B de V tal que

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

donde los escalares de la diagonal son los valores propios de f. (Indicación: Usuar inducción sobre n).

ii) ¿Es diagonalizable el endomorfismo f de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ dado por $f(x, y) = (-2x - y, x)$? En caso negativo, encontrar, si es posible, una base B de $\mathbb{R}^2$ donde $M(f, B)$ sea del tipo anterior.

15. Como aplicación del problema anterior, probar que cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

es semejante a una del tipo

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

donde los elementos de la diagonal son los valores propios de A.

16. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial $V(\mathbb{K})$ que tiene $n = \dim_{\mathbb{K}} V$ valores propios (contando multiplicidades). Demostrar que existen $f_1, f_2 \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ tales que f_1 es diagonalizable, $f_2^n = f_0$ y $f = f_1 + f_2$.

17. Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y cada $a \in \mathbb{K}$, encontrar la relación que hay entre los valores propios de A y los de $A + aI_n$. Demostrar que A es diagonalizable si y sólo si lo es $A + aI_n$.

18. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que cumple $A^2 = rI_n$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Demostrar que los únicos valores propios posibles de A son $\sqrt{r}$ y $-\sqrt{r}$. Probar también que A es diagonalizable.

19. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que cumple $A^2 = -rI_n$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Demostrar que los únicos valores propios posibles de A son $i\sqrt{r}$ y $-i\sqrt{r}$. Probar también que A es diagonalizable.

20. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ que cumple $A^2 = rA$, $r \in \mathbb{K}$, $r \neq 0$. Demostrar que los únicos valores propios posibles de A son r y 0. Probar también que A es diagonalizable.

21.
   i) Probar que la única matriz diagonalizable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que cumple $A^2 = 0$ es $A = 0$.

   ii) Probar que la única matriz diagonalizable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que cumple $A^2 - 2A + I_n = 0$ es $A = I_n$.

22. Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, sea F el endomorfismo de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dado por $F(X) = AX$, para toda $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calcular el polinomio característico de F. ¿Cuál es la relación que hay entre los valores propios de A y los de F? Probar que si A es diagonalizable, entonces F es diagonalizable.

23. (TEOREMA DE HAMILTON-CAYLEY)
    Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y sea $p_A(t)$ su polinomio característico.

    i) Dado $t \in \mathbb{K}$, demostrar que

    $$(A - tI_n)\mathrm{Adj}(A - tI_n)^T = p_A(t)I_n,$$

    donde $\mathrm{Adj}(C)^T$ denota la matriz traspuesta de la adjunta de una matriz $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

    ii) Sean $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ tales que $\mathrm{Adj}(A - tI_n)^T = \sum_{i=1}^{n-1} C_i t^i$. Probar que si $p_A(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$, entonces

    $$\begin{array}{rcl} AC_0 & = & a_0 I_n, \\ A^2C_1 - AC_0 & = & a_1 A, \\ A^3C_2 - A^2C_1 & = & a_2 A^2, \\ & \ldots & \\ A^nC_{n-1} - A^{n-1}C_{n-2} & = & a_{n-1}A^{n-1}, \\ -A^nC_{n-1} & = & a_n A^n. \end{array}$$

    iii) Deducir que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, es $p_A(A) = 0$.