Tema 5:

DETERMINANTES

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 1998/99
Licenciatura: Matemáticas (Plan 1973)
Universidad de Granada

1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Supongamos que existen subespacios vectoriales U, W de V tales que $V = U \oplus W$ y $f_*(U) \subseteq U$, $f_*(W) \subseteq W$. Llamaremos $f_1 : U \longrightarrow U$, $f_2 : W \longrightarrow W$ a las restricciones de f a U y a W, respectivamente, esto es,
$$f_1(x) = f(x),\ \forall x \in U, \qquad f_2(y) = f(y),\ \forall y \in W.$$
Demostrar que $\det f = (\det f_1)(\det f_2)$. Aplicar esto para demostrar que dadas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, se tiene que
$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right) = (\det A)(\det C).$$

2. Sean V, V' dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Dados $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, $f' \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V')$, demostrar que la aplicación de $V \times V'$ en sí mismo dada por
$$(x, x') \longmapsto (f(x), f'(x')),$$
es un endomorfismo del espacio vectorial $V \times V'$. Aplicar el problema anterior para demostrar que su determinante es $(\det f)(\det f')$.

3. Sean $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial con dimensión n y $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Supongamos que existe un subespacio vectorial U de V tal que $f_*(U) \subseteq U$. Sea
$$\begin{array}{rccc} \widetilde{f}: & V/U & \longrightarrow & V/U \\ & x+U & \longmapsto & f(x)+U \end{array}$$
i) Demostrar que $\widetilde{f}$ es una aplicación lineal.

ii) Probar que $\det f = (\det f_1)(\det \widetilde{f})$, donde $f_1 : U \longrightarrow U$ es la restricción de f a U, esto es, $f_1(x) = f(x),\ \forall x \in U$.

iii) Aplicar lo anterior para probar que dadas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, se tiene que
$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right) = (\det A)(\det C).$$

4. Sean $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. Probar que

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array} \right) = |\det(A + iB)|^2 .$$

Aplicar esto para demostrar que $A + iB$ es regular si y sólo si $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array} \right)$ es regular. Demostrar también que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} Gl(m, \mathbb{C}) & \longrightarrow & Gl(2m, \mathbb{R}) \\ A + iB & \longmapsto & \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array} \right) \end{array}$$

es un monomorfismo de grupos.

5. Calcular los determinantes de las siguientes matrices reales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix},$$

y generalizar a matrices de orden $n \in \mathbb{N}$.

6. Demostrar que el determinante de una matriz triangular superior (o inferior) se obtiene como el producto de los elementos de su diagonal. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que una matriz regular superior (o inferior) sea regular, en términos de los elementos de su diagonal. Dar una expresión explícita para la matriz inversa de una matriz diagonal que sea regular.

7. Demostrar que si $A = (a_{ij})_{i,j}$ es una matriz antisimétrica de orden 4 sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces se tiene que

$$\det A = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2 .$$

8. Demostrar que si A es una matriz antisimétrica de orden impar sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, entonces $\det A = 0$.

9. Calcular el rango de las siguientes matrices de números reales:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Usar determinantes para calcular rangos y con ello ver si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ son o no linealmente independientes:

    i) $\{(1,-1,2,0),(1,0,1,2),(1,0,2,1),(0,-1,1,-2)\}$,

    ii) $\{(1,1,-1,1),(1,-1,1,1),(-1,1,1,-1),(1,1,-1,-1)\}$.

11. Discutir y resolver los siguientes sistemas sobre $\mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{rcr} 3x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 & = & 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & -4 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcr} x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_1 \qquad - 3x_3 & = & 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

12. Discutir según los distintos valores del parámetro real a el sistema de ecuaciones sobre $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcl} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 & = & a \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 & = & a^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 & = & a^3 \end{array}\right\}$$

    Resolver para algún valor de a en el que el sistema sea compatible.

13. Se consideran los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rcl} U & = & L\left(\{(1,0,-1,2,1),(0,1,1,2,0),(1,1,0,4,1)\}\right), \\ W & = & L\left(\{(2,1,-1,6,2),(1,1,2,1,3),(1,1,1,1,-1),(1,0,0,0,1)\}\right). \end{array}$$

    Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de $U \cap W$ y de $U + W$.

14. En un espacio vectorial real V se consideran una base ordenada $B = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ y dos subespacios vectoriales U, W, el primero dado por

$$U = L\left(\{u_1 - u_2 + 3u_4, u_1 + 2u_2 + 3u_3 + 4u_4, u_1 - 7u_2 - 6u_3 + u_4\}\right),$$

mientras que W viene definido por las ecuaciones implícitas

$$\left.\begin{array}{rcl} b_1 + b_2 + b_3 & = & 0 \\ 3b_2 + b_3 + b_4 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Calcular las ecuaciones paramétricas y las implícitas de $U \cap W$ y de $U + W$.

15. Sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ se considera una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,m+1} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,m+1} \end{pmatrix}$, siendo $n > m$, con $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \neq 0$. Supongamos que para cada $j \in \{1, \dots, n-m\}$, se tiene

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & a_{1,m+1} \\ & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{m,m} & a_{m,m+1} \\ a_{m+j,1} & \dots & a_{m+j,m} & a_{m+j,m+1} \end{pmatrix} = 0.$$

Demostrar que el rango de A es m (Indicación: razonar por filas).

16. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n.

i) Llamemos $\mathrm{Aut}^+_{\mathbb{R}} V = \{f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}} V \ / \ \det f > 0\}$. Demostrar que $\mathrm{Aut}^+_{\mathbb{R}} V$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}} V$.

ii) Sea $Gl^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in Gl(n, \mathbb{R}) \ / \ \det A > 0\}$. Probar que $Gl^+(n, \mathbb{R})$ es un subgrupo normal de $Gl(n, \mathbb{R})$.

iii) Tomemos una base ordenada B de $V(\mathbb{R})$, y sea $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}V$. Demostrar que $f \in \mathrm{Aut}^+_{\mathbb{R}}V$ si y sólo si $M(f,B) \in Gl^+(n,\mathbb{R})$, y que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}^+_{\mathbb{R}}V & \longrightarrow & Gl^+(n,\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & M(f,B) \end{array}$$

es un isomorfismo de grupos.

17. Sea $P \in Gl^+(n,\mathbb{R})$, y sea $B = (x_1,\ldots,x_n)$ una base ordenada de un espacio vectorial real V. Demostrar que existe una única base ordenada $B' = (x'_1,\ldots,x'_n)$ de $V(\mathbb{R})$ tal que $M(1_V, B', B) = P$ y que además, B' define en V la misma orientación que B. Particularizar al caso $V = \mathbb{R}^3$, $B = (e_1,e_2,e_3)$ la base ordenada usual, y

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Gl^+(3,\mathbb{R}).$$

18.

i) Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión 1, y sea $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$. Demostrar que $F(x) = (\det F)x$, $\forall x \in V$.

ii) Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión n, y $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$. Llamemos f^* al endomorfismo de $A_n(V)$ asociado a f, esto es,

$$(f^*T)(y_1,\ldots,y_n) = T\left(f(y_1),\ldots,f(y_n)\right),$$

$\forall y_1,\ldots,y_n \in V$, $\forall T \in A_n(V)$. Demostrar que $\det f = \det f^*$.

19. Encontrar, si es posible, un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ que cumpla

$$f(1,0,0) = (1,0,0), \quad \det f = -1, \quad \mathrm{traza}(f) = 1.$$

20. Probar que dados $a \in \mathbb{K}$ y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se tiene

$$\det(a \cdot A) = a^n \det A \qquad (\text{en particular, } \det(a \cdot I_n) = a^n).$$

21. Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $(n \geq 2)$, llamemos $\widehat{A}$ a la matriz adjunta de A. Demostrar que $\det \widehat{A} = (\det A)^{n-1}$. Probar también que $\widehat{A}$ es regular si y sólo si lo es A. Cuando $\widehat{A}$ sea regular, obtener una expresión para $\widehat{A}^{-1}$.

22.
   i) Demostrar que si dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son semejantes, entonces tienen el mismo rango, la misma traza y el mismo determinante. ¿Es cierto el recíproco?

   ii) Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial con dimensión n, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supongamos que $\mathrm{rango}(A) = \mathrm{rango}(f)$, $\mathrm{traza}(A) = \mathrm{traza}\ (f)$ y $\det A = \det f$. ¿Podemos asegurar que existe una base B de V tal que $M(f, B) = A$?

23.
   i) Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Probar que si existe $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ siendo $B^2 = A$, entonces $\det A \geq 0$.

   ii) Probar que no existe $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $B^2 = -I_3$.

24. Sea V un espacio vectorial real finitamente generado. Supongamos que existe un endomorfismo j de V tal que $j \circ j = -1_V$. Demostrar que la dimensión de $V(\mathbb{R})$ es par. Concluir que una condición necesaria y suficiente para que un espacio vectorial real de dimensión finita posea una estructura de espacio vectorial complejo es que su dimensión (real) sea par.

25. Probar que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, entonces

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array} \right) = (\det A)(\det C).$$

26. En $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ se considera una simetría respecto de una recta que pase por el origen. ¿Conserva o invierte este automorfismo la orientación? La misma pregunta si en lugar de una simetría se considera un giro de ángulo $\theta \in]0, 2\pi[$ alrededor del origen. (Nótese que ambas aplicaciones son lineales con la estructura usual de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$).

27. Decir si los siguientes automorfismos de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ conservan ó invierten la orientación:

    i) Una simetría respecto de un plano.

    ii) Una simetría respecto de una recta.

    iii) Un giro respecto de una recta, de ángulo $\theta \in]0, 2\pi[$.