Tema 4:

TENSORES

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 1998/99
Licenciatura: Matemáticas (Plan 1973)
Universidad de Granada

1. Sean $V_1, \ldots, V_r, W$ espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ (siendo la característica de $\mathbb{K}$ distinta de 2), $r \geq 2$. Probar que la única aplicación
$$T : V_1 \times \ldots \times V_r \longrightarrow W$$
que es a la vez lineal y r-lineal es la aplicación nula, esto es,
$$T(x_1, \ldots, x_r) = 0, \qquad \forall (x_1, \ldots, x_r) \in V_1 \times \ldots \times V_r.$$

2. Sean $V_1, \ldots, V_r, W$ espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Demostrar que el conjunto de las aplicaciones multilineales de $V_1 \times \ldots \times V_r$ en W,
$$\mathrm{Multi}_{\mathbb{K}}(V_1 \times \ldots \times V_r, W),$$
tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

3. Sean V_1, V_2, V, V' cuatro espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Consideremos dos aplicaciones
$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V'), \quad T \in \mathrm{Multi}_{\mathbb{K}}(V_1 \times V_2, V).$$
Demostrar que la composición $f \circ T$ es una aplicación bilineal de $V_1 \times V_2$ en V'.

4. Sean $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial, $T \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$ y $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$. Probar que la aplicación
$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \longmapsto & T\left(f(x), f(y)\right) \end{array}$$
es un tensor de tipo $(2, 0)$ sobre V.

5. Consideremos una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se define
$$\begin{array}{cccc} T_A : & \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x, y) & \longmapsto & {}^t x \cdot A \cdot y, \end{array}$$
donde estamos representando a los vectores de $\mathbb{K}^n$ como matrices de orden $n \times 1$.

a) Probar que $T_A \in \mathcal{T}_{2,0}(\mathbb{K}^n)$.

b) Si llamamos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a la base usual de $\mathbb{K}^n$ y $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ a su base dual, demostrar que

$$T_A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot \varphi^i \otimes \varphi^j, \qquad \text{donde} \qquad A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}.$$

c) En el caso particular $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $n = 3$, obtener las coordenadas de T_A en la base ordenada

$$\left(\varphi'^1 \otimes \varphi'^1, \varphi'^1 \otimes \varphi'^2, \varphi'^1 \otimes \varphi'^3, \ldots, \varphi'^3 \otimes \varphi'^1, \varphi'^3 \otimes \varphi'^2, \varphi'^3 \otimes \varphi'^3\right),$$

siendo $\{x'_1 = e_1,\ x'_2 = e_1 + e_2,\ x'_3 = e_1 + e_2 + e_3\}$, base de $\mathbb{R}^3$, y $\{\varphi'^1, \varphi'^2, \varphi'^3\}$ su base dual, y

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Se considera el tensor $2-$covariante dado por

$$T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad T\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = 2x_1x_2 - 3x_1y_2 + y_1y_2.$$

a) Calcular la matriz de coordenadas de T respecto de la base ordenada $B = (u_1, u_2)$ de $\mathbb{R}^2$, donde $u_1 = (1, 0),\ u_2 = (1, 1)$.

b) Lo mismo del apartado anterior para la base ordenada $B' = (v_1, v_2)$, dada por $v_1 = (2, 1),\ v_2 = (1, -1)$.

c) Comprobar que la relación entre ambas matrices de coordenadas de T es

$$M_{B'}(T) = {}^t M(1_{\mathbb{R}^2}, B', B) \cdot M_B(T) \cdot M(1_{\mathbb{R}^2}, B', B).$$

7. sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y sean $x \in V$, $\varphi \in V^*$, $x \neq 0$, $\varphi \neq \varphi_0$. Demostrar que si $\varphi(x) = 1$, entonces se puede encontrar una base $\{\varphi^i \otimes x_j \ / \ i, j = 1, \ldots, n\}$ de $\mathcal{T}_{1,1}(V)$ tal que $\varphi^1 \otimes x_1 = \varphi \otimes x$. Si ocurre $\varphi(x) = 0$ y $n \geq 2$, demostrar que es posible encontrar tal base ahora con $\varphi^1 \otimes x_2 = \varphi \otimes x$.

8. En un espacio vectorial $V(\mathbb{K})$ de dimensión n, se eligen dos vectores x e y. Dado $T \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$, definimos dos aplicaciones

$$\begin{array}{rccc} f: & V & \longrightarrow & V, \\ & z & \longmapsto & T(x,y)\cdot z \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f': & V & \longrightarrow & V \\ & z & \longmapsto & T(x,z)\cdot y. \end{array}$$

Probar que f y f' son endomorfismos de V, y que

$$\text{traza}(f) = n\cdot T(x,y), \qquad \text{rango}(f') \leq 1, \qquad \text{traza}(f') = T(x,y).$$

9. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita, y $V^*(\mathbb{K})$ su espacio dual. Comprobar que $\mathcal{T}_{s,0}(V^*) = \mathcal{T}_{0,s}(V)$. Para cada $T \in \mathcal{T}_{0,r}(V^*)$, definimos

$$\widetilde{T} : V \times \overset{r)}{\ldots} \times V \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; \widetilde{T}(x_1,\ldots,x_r) = T\left(\Phi_{x_1},\ldots,\Phi_{x_r}\right),$$

donde $\Phi : V \longrightarrow V^{**}$ es el isomorfismo que establece el Teorema de Reflexividad. Probar que $\widetilde{T} \in \mathcal{T}_{r,0}(V)$ para cada $T \in \mathcal{T}_{0,r}(V^*)$, y que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} H: & \mathcal{T}_{0,r}(V^*) & \longrightarrow & \mathcal{T}_{r,0}(V) \\ & T & \longmapsto & \widetilde{T} \end{array}$$

es un isomorfismo (natural) de espacios vectoriales. Generalizar esta construcción para demostrar que $\mathcal{T}_{s,r}(V^*)$ y $\mathcal{T}_{r,s}(V)$ son isomorfos de manera natural.

10. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita, y $\text{Multi}_{\mathbb{K}}(V\times V, V)$ el espacio vectorial de todas las aplicaciones bilineales de $V\times V$ en V. Para cada $f \in Multi_{\mathbb{K}}(V\times V, V)$, definimos

$$T_f : V\times V\times V^* \longrightarrow \mathbb{K} \;/\; T_f(x,y,\varphi) = \varphi\left(f(x,y)\right).$$

Probar que $T_f \in \mathcal{T}_{2,1}(V)$ y que la aplicación $t \longmapsto T_f$ es un isomorfismo natural entre los espacios vectoriales $\text{Multi}_{\mathbb{K}}(V\times V, V)$ y $\mathcal{T}_{2,1}(V)$. Generalizar para demostrar que $\text{Multi}_{\mathbb{K}}(V\times \overset{r)}{\ldots} \times V, V)$ y $\mathcal{T}_{r,1}(V)$ son isomorfos de manera natural.

11. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita. Para cada $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^*)$ definimos
$$T_f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K} \;/\; T_f(x, y) = (f(x))\,(y),$$
(nótese que $f(x) \in V^*$ y por tanto tiene sentido $(f(x))\,(y)$). Demostrar que $T_f \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$ y que la aplicación $f \longmapsto T_f$ es un isomorfismo de $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^*)$ en $\mathcal{T}_{2,0}(V)$.

12. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, y sea G un tensor de tipo $(2, 0)$ sobre V, simétrico, y verificando la siguiente condición:
$$\text{Si } \; x \in V \;\text{ verifica }\; G(x, y) = 0, \quad \forall y \in V \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$
(Un tensor que verifica lo anterior es el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$). Para cada $x \in V$, se define
$$\varphi_x : V \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad \varphi_x(y) = G(x, y), \quad \forall y \in V.$$
Probar que $\varphi_x \in V^*$, y que la aplicación
$$\begin{array}{rccc} H: & V & \longrightarrow & V^* \\ & x & \longmapsto & \varphi_x \end{array}$$
es un isomorfismo de espacios vectoriales. En el caso particular $V = \mathbb{R}^3$ y G el producto escalar usual, relacionar las coordenadas de cada $x \in \mathbb{R}^3$ en la base ordenada usual B con las coordenadas de φ_x en la base ordenada dual de B.

13. Sean $V(\mathbb{R})$ y G como en el problema anterior. Llamemos $H : V \longrightarrow V^*$ al isomorfismo que produce G. Para cada $T \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$ se define
$$T_H : V^* \times V^* \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; T_H(\varphi, \psi) = T\left(H^{-1}(\varphi), H^{-1}(\psi)\right).$$
Probar que $T_H \in \mathcal{T}_{0,2}(V)$ y que la aplicación $T \longmapsto T_H$ es un isomorfismo de espacios vectoriales de $\mathcal{T}_{2,0}(V)$ en $\mathcal{T}_{0,2}(V)$ (que aunque no depende de bases, sí que depende del tensor G). De forma análoga, se define para cada $T \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$
$$T^H : V \times V^* \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; T^H(x, \varphi) = T\left(x, H^{-1}(\varphi)\right).$$
Probar que $T^H \in \mathcal{T}_{1,1}(V)$ y que la aplicación $T \longmapsto T^H$ es un isomorfismo de espacios vectoriales de $\mathcal{T}_{2,0}(V)$ en $\mathcal{T}_{1,1}(V)$.

14. Los conceptos de tensor simétrico y antisimétrico pueden generalizarse a tensores de tipo $(r, 0)$: Dado $T \in \mathcal{T}_{r,0}(V)$, diremos que T es simétrico si lo es respecto de cada par de sus variables: $\forall i, j = 1, \ldots, r$,

$$T(x_1, \ldots, \overset{i)}{x_i}, \ldots, \overset{j)}{x_j}, \ldots, x_r) = T(x_1, \ldots, \overset{i)}{x_j}, \ldots, \overset{j)}{x_i}, \ldots, x_r),$$

$\forall x_1, \ldots, x_r \in V$. Análogamente, diremos que T es antisimétrico si lo es respecto de cada par de sus variables: $\forall i, j = 1, \ldots, r$,

$$T(x_1, \ldots, \overset{i)}{x_j}, \ldots, \overset{j)}{x_j}, \ldots, x_r) = -T(x_1, \ldots, \overset{i)}{x_j}, \ldots, \overset{j)}{x_i}, \ldots, x_r),$$

$\forall x_1, \ldots, x_r \in V$. Probar que llamando

$$S_r(V) = \{T \in \mathcal{T}_{r,0}(V) \quad / \quad T \text{ es simétrico } \},$$

$$A_r(V) = \{T \in \mathcal{T}_{r,0}(V) \quad / \quad T \text{ es antisimétrico } \},$$

obtenemos dos subespacios vectoriales de $\mathcal{T}_{r,0}(V)$, pero que si $r > 2$, entonces $\mathcal{T}_{r,0}(V)$ ya no es suma directa de ambos subespacios.

15. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial con dimensión n. Demostrar que al asignarle a cada base ordenada de V la matriz I_n, se define un tensor de tipo $(1, 1)$ sobre V, pero que la misma asignación no define un tensor de tipo $(2, 0)$ ni de tipo $(0, 2)$ sobre V.

16. Sea $V(\mathbb{R})$ un espacio vectorial real de dimensión 3. Probar que dada una base $\{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3\}$ de V^*, la aplicación lineal $H : A_1(V) \longrightarrow A_2(V)$ que cumple

$$H(\varphi^1) = \varphi^2 \wedge \varphi^3, \quad H(\varphi^2) = \varphi^1 \wedge \varphi^3, \quad H(\varphi^3) = \varphi^1 \wedge \varphi^2$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

17. Demostrar que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (A, B) & \longmapsto & \text{traza}({}^tA \cdot B) \end{array}$$

Es un tensor de tipo $(2, 0)$ sobre el espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Decir si es simétrico ó antisimétrico.

18. Sea $V\mathbb{K})$ un espacio vectorial.

    i) Dado $T \in S_2(V)$, probar que $T = T_0$ si y sólo si $T(x,x) = 0$, $\forall x \in V$.

    ii) Dados $T, T' \in S_2(V)$, probar que $T = T'$ si y sólo si $T(x,x) = T'(x,x)$, $\forall x \in V$.

19. Se considera la aplicación

$$\begin{array}{rccc} [\,,] : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & (A,B) & \longmapsto & [A,B] = AB - BA. \end{array}$$

    i) Demostrar que $[\,,]$ es bilineal y que cumple $[A,B] = -[B,A]$, $\forall A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

    ii) Probar que esta operación binaria no es asociativa, pero verifica

$$[A,[B,C]] + [C,[A,B]] + [B,[C,A]] = 0, \qquad \forall A,B,C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

    iii) Probar que si $A,B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ son matrices antisimétricas, entonces $[A,B]$ vuelve a ser antisimétrica.

    iv) Para $n = 3$, se considera el isomorfismo $F : \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$F \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = (a,b,c).$$

    ¿Cómo se relacionan $F(A), F(B)$ y $F([A,B])$?

20. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión n, y sea T un tensor antisimétrico de tipo $(2,0)$ sobre V. Supongamos que existen dos vectores u y v en V tales que $T(u,v) \neq 0$. Se definen las formas lineales

$$\begin{array}{rccc} \varphi_u : & V & \longrightarrow & \mathbb{K}, \\ & x & \longmapsto & T(u,x) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \varphi_v : & V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & T(v,x) \end{array}$$

    i) Demostrar que φ_u y φ_v son linealmente independientes en V^*.

    ii) Si llamamos $W = \{x \in V \ / \ \varphi_u(x) = \varphi_v(x) = 0\}$, entonces W es un subespacio vectorial de dimensión $n-2$.

    iii) $V = W \oplus L(\{u,v\})$.