Tema 3:

ESPACIO DUAL

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 1998/99
Licenciatura: Matemáticas (Plan 1973)
Universidad de Granada

1. En $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ se considera la base $\mathcal{B} = \{x_1, x_2\}$, donde $x_1 = (1, 1), x_2 = (2, -1)$. Calcular la base dual de $\mathcal{B}$.

2. En $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ se consideran las formas lineales

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y, z) &= 2x - y + 3z, \\ \psi_2(x, y, z) &= 3x - 3y + z, \\ \psi_3(x, y, z) &= 4x + 7y + z. \end{aligned}$$

   Probar que $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ forman base de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})^*$. En la ordenación $B^* = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, calcular las coordenadas de la forma lineal $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ dada por

$$\varphi(x, y, z) = x + y + z, \qquad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R}).$$

   Encontrar la base ordenada B de $\mathbb{R}^3$ cuya base ordenada dual es B^*.

3. Sea $V(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor ó igual que 2, con coeficientes reales. Se consideran las siguientes bases ordenadas de V:

$$B = (1, x, x^2), \qquad B' = (1, 1 + x, 1 + x + x^2).$$

   Encontrar las ecuaciones de cambio de base entre B^* y B'^*. Si $\varphi \in V^*$ viene dada por

$$\varphi\left(p(x)\right) = p(-1),$$

   encontrar las coordenadas de φ en la base ordenada B'^*.

4. Sea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices reales de orden 2. Consideremos la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} \text{traza}: & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & \text{traza}(A). \end{array}$$

   Encontrar una base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^*$ en la que esté esta forma lineal. Encontrar también una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'$.

5. En $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideran las formas lineales

$$\varphi_1 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad \varphi_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d,$$

$$\varphi_2 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad \varphi_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = b - c.$$

   a) Probar que φ_1 y φ_2 son linealmente independientes.

   b) Ampliar $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ a una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^*$. Ordenar tal base, y calcular en dicha ordenación las coordenadas de la forma $\varphi \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^*$ dada por

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + b + c + d.$$

   c) Cacular el subespacio anulador de $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

6. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita. Probar que

   a) $\mathrm{an}(\{0\}) = V^*, \qquad \mathrm{an}(V) = \{\varphi_0\}$, donde φ_0 es la forma lineal nula.

   b) Si U, W son dos subespacios de V, entonces

$$\mathrm{an}(U + W) = \mathrm{an}(U) \cap \mathrm{an}(W), \qquad \mathrm{an}(U \cap W) = \mathrm{an}(U) + \mathrm{an}(W).$$

   c) Deducir que si $V = U \oplus W$, entonces $V^* = \mathrm{an}(U) \oplus \mathrm{an}(W)$.

7. En $\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ se considera la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

   Obtener la correspondiente base dual en $\mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{R})$, teniendo en cuenta la identificación existente entre $\mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})^*$.

8. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial, y $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de V. Llamemos $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ a su base dual. Dados $\lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, se definen los conjuntos $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\}$, $\overline{\mathcal{B}'} = \{\overline{\varphi_1}, \ldots, \overline{\varphi_n}\}$, donde

$$\overline{x_1} = x_1, \qquad \overline{x_i} = x_i - \lambda_i x_1, \qquad \forall i = 2, \ldots, n,$$

$$\overline{\varphi_1} = \varphi_1 + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \varphi_j, \qquad \overline{\varphi_i} = \varphi_i, \qquad \forall i = 2, \ldots, n.$$

Probar que $\overline{\mathcal{B}}$ es base de V, que $\overline{\mathcal{B}'}$ es base de V^*, y que $\overline{\mathcal{B}'}$ es la base dual de $\overline{\mathcal{B}}$.

9. Calcular el anulador del subespacio vectorial U de $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ dado por

$$U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 / a_1 + a_2 - a_3 = 0\}.$$

10. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, y ${}^tA$ la matriz traspuesta de A. Demostrar que la traza de A y la de ${}^tA$ coinciden. Concluir que si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n, para cada $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ se tiene que

$$\text{traza}(f) = \text{traza}({}^tf).$$

11. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Probar que A y B son semejantes si y sólo si ${}^tA$ y ${}^tB$ son semejantes.

12. Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, definimos una aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & X & \longmapsto & \text{traza}(A \cdot X). \end{array}$$

Demostrar que $\varphi_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$. Recíprocamente, probar que para cada forma lineal φ sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ existe una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $\varphi_A = \varphi$.

13. Se definen las aplicaciones

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & (a,b,c) & \longmapsto & 2a + b - c \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b,c) & \longmapsto & a + b + c. \end{array}$$

Demostrar que φ y ψ son formas lineales sobre $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ y que son linealmente independientes. Encontrar una tercera forma lineal $\alpha \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R})^*$ de modo que $\{\varphi, \psi, \alpha\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})^*$. Encontrar también una base de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ cuya base dual sea $\{\varphi, \psi, \alpha\}$.

14. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ verificando $f \circ f = f$. Probar que su aplicación traspuesta, ${}^t f$, verifica ${}^t f \circ {}^t f = {}^t f$. Probar también que se tiene
$$V^* = \mathrm{an}(\ker(f)) \oplus \mathrm{an}(\mathrm{Im}(f)).$$

15. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita, y sean $y \in V$, $\varphi \in V^*$. Definimos un endomorfismo f de V mediante
$$f(x) = \varphi(x)y, \qquad \forall x \in V.$$
Demostrar que la traza de f es $\varphi(y)$.

16. Se considera la aplicación lineal
$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y+z). \end{array}$$
Calcular la matriz de la aplicación traspuesta de f respecto de las bases ordenadas duales de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$. Calcular también los anuladores
$$\mathrm{an}(\ker(f)), \qquad \mathrm{an}(\mathrm{Im}({}^t f)).$$

17. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita. Consideremos los grupos de automorfismos $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}} V$ y $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V^*)$. Demostrar que la aplicación
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}} V & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V^*) \\ f & \longmapsto & ({}^t f)^{-1} \end{array}$$
es un isomorfismo de grupos. Como cosecuencia, demostrar que la aplicación
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gl}(n,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{Gl}(n,\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & ({}^t A)^{-1} \end{array}$$
es un automorfismo del grupo $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{K})$.

18. Sean V y V' dos espacios vectoriales finitamente generados sobre el mismo cuerpo, y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Probar que si f es un monomorfismo (epimorfismo), entonces ${}^t f$ es un epimorfismo (monomorfismo).

19. Probar que toda $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ es de la forma
$$\varphi(a_1, a_2, a_3) = r_1 a_1 + r_2 a_2 + r_3 a_3,$$
donde $r_i = \varphi(e_i)$, $i = 1, 2, 3$, y $B = (e_1, e_2, e_3)$ es la base ordenada usual de $\mathbb{R}^3$. Probar también que las coordenadas de φ en la base ordenada dual de B en $(\mathbb{R}^3)^*$ son (r_1, r_2, r_3).

20. Sea V el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor ó igual que 2. Sean
$$B = (1, x, x^2), \qquad B^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$
la base ordenada usual de V y su base ordenada dual, respectivamente. Se definen las siguientes aplicaciones de V en $\mathbb{R}$:

a) $\psi_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx, \quad \psi_2(p(x)) = p'(1), \quad \psi_3(p(x)) = p(0),$

b) $\alpha_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx, \quad \alpha_2(p(x)) = \int_0^1 xp(x)dx,$
$\alpha_3(p(x)) = \int_0^1 x^2 p(x)dx, \quad \forall p(x) \in V.$

Demostrar que tanto $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ como $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ son bases de V^*. Calcular las coordenadas de los elementos de tales bases en B^*, y hallar las bases de V de las cuales son bases duales.

21. Sea $B^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ la base ordenada dual de la base ordenada usual B de $\mathbb{R}^3$. Consideremos el endomorfismo f de $(\mathbb{R}^3)^*$ dado por
$$\begin{aligned} f(\varphi_1) &= \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3, \\ f(\varphi_2) &= \varphi_1 + 2\varphi_3, \\ f(\varphi_3) &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3. \end{aligned}$$
Encontrar el único endomorfismo h de $\mathbb{R}^3$ que verifica ${}^t h = f$.

22. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita, y sea U un subespacio suyo. Demostrar que si S es una base de $\mathrm{an}(U)$, entonces $U = \mathrm{an}(S)$.

23. Sean V y V' dos espacios vectoriales finito-dimensionales sobre el mismo cuerpo, y sea f una aplicación lineal de V en V'. Tomemos $\varphi \in V^*$. Probar que existe $\varphi' \in V'^*$ tal que $\varphi' \circ f = \varphi$ si y sólo si $\ker(f) \subseteq \ker(\varphi)$.

24. Se considera el espacio vectorial
$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ / \ \mathrm{grado}\,(p(x)) \leq n-1\}.$$
Probar que para cada forma lineal $\varphi \in V^*$, existe un único polinomio $q(x) \in V$ tal que
$$\varphi\,(p(x)) = \int_o^1 p(x)q(x)dx, \qquad \forall p(x) \in V.$$

25. Sea V un espacio vectorial complejo. Considerando a V como espacio vectorial real, dotar a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$ de estructura de espacio vectorial complejo. Probar que con tal estructura compleja, se tiene
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) = V^* \oplus V',$$
donde V^* denota al espacio dual de $V(\mathbb{C})$, y
$$V' = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) \ / \ f(ix) = -i \cdot f(x), \quad \forall x \in V\}.$$

26. Sean V, V' dos espacios vectoriales finito-dimensionales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$.

   a) Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$. Probar que
   $$\forall\ U \leq V, \qquad \mathrm{an}\,(f_*(U)) = ({}^t f)^*\,(\mathrm{an}(U))\,.$$

   b) Tomemos ahora un automorfismo f de V. Probar que ${}^t f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}} V^*$. Demostrar también que si h es otro automorfismo de V^* tal que
   $$\forall\ U \leq V, \qquad \mathrm{an}\,(f_*(U)) = h^*\,(\mathrm{an}(U))\,,$$
   entonces ${}^t f$ y h son proporcionales.